Alkalmazott áramlástan és akusztika

(önálló felkészülést segítő tananyag az akusztika részhez)

Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

1. előadás

Tartalom:

1.1. Az akusztikai hullámegyenlet és megoldásai

Az alkalmazott akusztika előadássorozatot a korábbi hangtani ismereteink egy fontos fejezetének rövid áttekintésével kezdjük. Az akusztikai hullámegyenletet és megoldásait mutatjuk be, a korábbihoz képest általánosabb megközelítésben, több nem érintett részlet közreadásával. Az ismétlés nem csak a hangtan sajátos tudományvilágába vezet vissza, hanem jó alapot ad, további hullámakusztikai módszereinek megértéséhez. A levezetés megkezdése előtt beszéljünk a matematika mérnöki munkában betöltött fontos szerepéről.

Rendhagyó matematikai bevezető: Mérnöki megközelítésben a matematika egy olyan módszer, amely segítségével jelenségekről úgy szerezhetünk ismereteket, hogy magát a jelenséget a valóságban nem kell végrehajtani. Továbbá a számokkal megadhatjuk a dolgok pontos mértékét. A kicsi és nagy jelzők helyett a szándékolt folyamatokhoz előírhatjuk a változók éppen szükséges nagyságát. Ennek megértéséhez vegyünk egy egyszerű, a gépészmérnöki gyakorlatban jól ismert példát. Feladatunk egy gázzal töltött, 2 m^3 térfogatú, henger alakú, 1 m átmérőjű, 20 bar belső túlnyomásnak ellenálló tartály elkészítése. Szokásos megközelítésben az állékonyság biztosításához szükséges legfontosabb tulajdonság a tartályfalvastagság. Ha a falvastagságot előzetes számítások nélkül, próbálkozással kellene meghatározni, a feladat csak veszélyes, drága és hosszú ideig tartó munkával lenne megoldható. Ezzel szemben a probléma matematikai modellezésével levezetett kazánformula biztonságos, olcsó és gyors feltételek mellett készíti elő a konkrét gyakorlati megvalósítást. A rövid levezetést szilárdságtanból minden gépészmérnök jól ismeri, jelen esetben csak a végeredményt felhasználva

$$\delta = \frac{\Delta p D}{2\sigma_h} = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 1}{2 \cdot 200 \cdot 10^6} = 0{,}005\ [m]$$

200 MPa megengedett legnagyobb mechanikai feszültség esetén, biztonsági tényező és korróziós tartalék nélkül, az állékonyság biztosításához szükséges legkisebb tartály falvastagság 5mm. A szükséges falvastagság meghatározásához a szilárdságtani feladat megoldására a matematikai modellt megérteni és alkalmazni, de feltételezhetően még kitalálni is kevesebb időbe került, mint különböző falvastagságú tartályokkal állékonysági vizsgálatsorozatot végezni valóságos körülmények között.

Fontos megjegyezni, hogy egy jelenség matematikai modellezésénél, a megoldás elemzése során a jelenségről olyan új részletek derülhetnek ki, amelyeket a felületes kísérleti vizsgálat nem mutat ki. Így kijelenthető, hogy a matematikai modellezés a mérnöki tervezés mellett a tudományos megismerést is szolgálja. Számtalan példa sorolható a fizikában (részecskefizika, csillagászat, …), amikor egy új felismerés matematikai modell alapján született meg és az elméleti felfedezés kísérleti igazolására csak jóval később került sor. A matematikai modell megoldásainak részletes vizsgálata a tanulás során is hasznos. Rendszerezi a tudásunkat, rejtőzködő részletekre hívja fel a figyelmet és a kiindulási feltételekkel együtt az alkalmazási határokat is megmutatja. Így a megoldások vizsgálatát a jegyzet egyes fejezeteiben a hangtani jelenségek bemutatásánál is alkalmazzuk.

A matematikai modellezés lépései: A jelenséget leíró fizikai változók kiválasztása, a jelenséggel kapcsolatos fizikai alapelvek kiválasztása, a fizikai alapelveket leíró és a változók között kapcsolatot teremtő matematikai egyenletek felírása, egyszerűsítés, megoldás és ellenőrzés. A következő részben ezeket a lépéseket járjuk végig részletesen a hangjelenségek modellezéséhez. A kiindulást segíti a léghangok áramlási természete, vagyis a hang egy sajátos összenyomható közegáramlás, így a matematikai modell megalkotásához az áramlástani változók és alapegyenletek felhasználhatók.

A hangteret leíró változók:

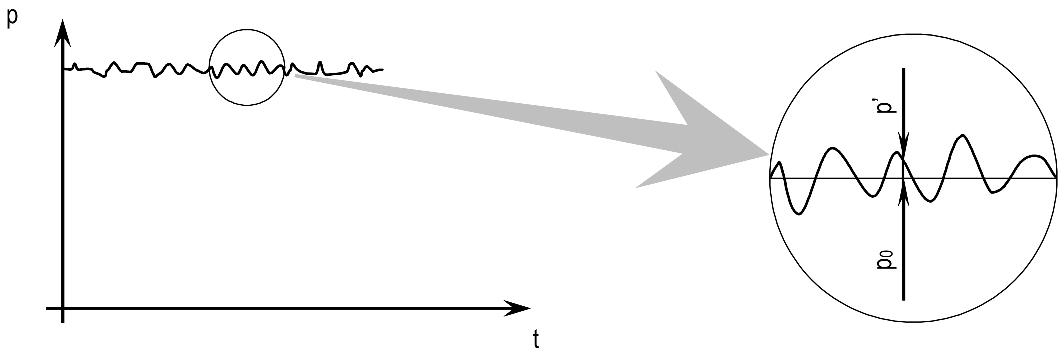
- Sebességvektor, $\underline{v}$ [m/s] (időegység alatt megtett távolságvektor), (a vektor mennyiséget a változó betűjelének aláhúzásával jelöljük)
- Nyomás, p [Pa] (felületegységen ható normális irányú nyomóerő)
- Sűrűség, ρ [kg/m^3] (térfogategységben zárt anyag tömege)
- Hőmérséklet, T [K] (az anyagok felmelegedettségének mértéke, az anyagot alkotó részecskék rendezetlen hő-mozgásából származó átlagos mozgási energiával arányos mennyiség)

Hangjelenségekkel kapcsolatos fizikai alapelvek:

- Anyag- vagy tömegmegmaradás (áramlás-, illetve hangjelenség során anyag, illetve tömeg nem keletkezik és nem vész el)
- Impulzusmérleg (közegrész impulzusának időegységre jutó megváltozása a hatóerők eredőjével egyenlő)
- Energiamérleg (közegrész energiájának időegységre jutó megváltozása a hatóerők eredője által időegység alatt elvégzett munka (teljesítmény) és az időegység alatt közölt hő összegével egyenlő)
- Anyagtörvény (az adott jelenségnek teret adó anyagi közeg jelenséggel kapcsolatos viselkedését meghatározó elv, anyagtörvény pl.: a ideális gáz állapotegyenlet, a Hooke-törvény, illetve a fizika más területén pl.: az Ohm-törvény)

Hangjelenségeket leíró alapegyenletek:

- Kontinuitás- (vagy folytonosság-) egyenlet (anyag- vagy tömeg-megmaradás elv kifejezésére)
- Mozgásegyenlet (impulzus-mérleg kifejezésére)
- Energiaegyenlet (energia-mérleg kifejezésére)
- Ideális gáz állapotegyenlet (a léghangok többsége termodinamikai szempontból ideálisnak tekinthető gázban alakul ki, így esetünkben az anyagtörvény az ideális gáz állapotegyenlet)



Hangteret leíró nyomás változó felbontása időben egyensúlyi és változó tagokra

Hangtani változók felbontása egyensúlyi és időben változó részre: Tapasztalati megfigyelés, hogy a hangteret leíró változók időben állandó, nagy egyensúlyi értékekre és időben ingadozó, kis értékekre bonthatók (ld. ábra). Úgy is fogalmazhatunk, hogy az akusztika a nagyon nagy mennyiségek nagyon kis megváltozásának tudománya. A felbontásnak a későbbi levezetések során számos előnyét fogjuk tapasztalni (pl.: egyensúlyi tagok idő szerinti deriváltjai kiesnek, időben változó tagok négyzetes kifejezései, egymással képzett szorzatai elhanyagolhatók lesznek).

$$p = p_0 + p' \qquad \underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{v}' \qquad T = T_0 + T' \qquad \rho = \rho_0 + \rho'$$

A hangtéri változókra a kifejezések bal oldala az index nélkül a teljes mennyiséget, a „0" index az időben állandó, egyensúlyi tagot, illetve a vessző jelölés az időben változó, ingadozó részt jelöli (nem hely szerinti derivált!). Akusztikában a kiemelt fontosságuk miatt p' és $\underline{v}'$ változók külön megnevezést kaptak, hangnyomás (p') és részecskesebesség ($\underline{v}'$).

Egyszerűsítő feltételek:

- A hangterjedésnek teret adó közeg homogén, súrlódásmentes, kontinuum (homogén: anyagjellemzők függetlenek a helytől, súrlódásmentes: egymással párhuzamos folyadékrétegek egymáshoz képest ellenállás mentesen mozgathatók, kontinuum: a közeg anyagi megoszlása folytonos és nem atomi illetve molekuláris szerkezetű).

- A hangterjedés során a közegben létrejövő elemi termodinamikai állapotváltozások hőkicserélődés mentes (adiabatikus), illetve veszteség (disszipáció) nélkül, azaz izentropikus (p/ρ^{κ}=áll.) módon jönnek létre.

- A hangterjedés nyugvó közegben jön létre ($\underline{v}_0$= 0 m/s)

- A részecskesebesség kivételével az összes hangéri változóra igaz, hogy az időben ingadozó és az egyensúlyi érték hányadosa jóval kisebb, mint egy,

$$p'/p_0 \ll 1 \qquad T'/T_0 \ll 1 \qquad \rho'/\rho_0 \ll 1$$

A homogén lineáris akusztikai hullámegyenlet

A hang térben és időben kiterjedő fizikai jelenség, ezért a hangterek általános modellezésénél a hangteret leíró változók (p', v', T' és ρ') hely- és időfüggését kell meghatározni. A hely- és időfüggő matematikai kapcsolatrendszert a hullámakusztikai modell, a hullámegyenlet és megoldása, a hullámfüggvény írja le. A hely- és időfüggvények meghatározásához a hangjelenségre vonatkozó hely- és időfüggő differenciálegyenleteket kell megoldani.

Kontinuitás egyenlet általános 3 dimenziós alakja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0$$

A hangtéri változók felbontásával, nyugvó közegben (v_0= 0 m/s),

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + div\left((\rho_0 + \rho')\underline{v}'\right) = 0$$

A sűrűség egyensúlyi értéke időben állandó, így a deriváltja nulla,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + div(\rho_0 \underline{v}' + \rho' \underline{v}') = 0$$

Továbbá a zárójelen belül a másodrendben kicsi, második tag elhanyagolásával, és a szorzat divergenciájának felbontásával,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \underline{v}' grad(\rho_0) + \rho_0 div(\underline{v}') = 0$$

Homogén közegben az egyensúlyi sűrűség a hely függvényében állandó, így a bal oldalon a második tag nulla. A maradék a lineáris akusztikai kontinuitás egyenlet,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 div(\underline{v}') = 0$$

Az egyenlet lineáris, mert a benne szereplő ismeretlen hangtéri változók (illetve azok deriváltjai) lineáris kifejezések, akusztikai, mert az alkalmazott elhanyagolások hangterekben teljesülnek és kontinuitás egyenlet, mert a kiinduló egyenlet a tömegmegmaradás elvét fejezi ki.

A súrlódásmentes folyadék mozgásegyenlet, az Euler-egyenlet háromdimenziós, sebességi derivált-tenzoros alakja,

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{D}}_v \underline{v} = -\frac{1}{\rho} grad\, p + \underline{g}$$

A hangtéri változók felbontásával nyugvó közegben (v_0= 0 m/s) a mozgásegyenlet,

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} + \underline{\underline{D}}_{v'} \underline{v}' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} grad(p_0 + p') + \underline{g}$$

A gépészmérnöki gyakorlatban előforduló hangjelenségeknél a hullámhossz nagy, így a hangtéri változók (jelen esetben részecskesebesség) hosszegységre jutó megváltozása kicsi, ezért a bal oldalon a második tag másodrendben kicsi, jó közelítéssel elhanyagolható. Továbbá a ρ' kicsi értéke miatt legyen $\rho_0+\rho' \approx \rho_0$, így a jobb oldalon az összeg deriválásával,

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} grad(p_0) + g_x - \frac{1}{\rho_0} grad(p')$$

Az egyenlet jobb oldalán az első két tag az egyensúlyi nyomásból származó erő és a külső eredő erőtér tömegegységre vonatkozó értékei (a hidrostatika egyenlet bal oldala), előjeles összegük nulla. A külső erőtér kiesése fizikai megközelítésben azt jelenti, hogy a levegőrészecskék a levegőben lebegnek, hangtani szempontból a statikus erőtér jelenléte nem befolyásolja a hangterjedést (pl.: gravitációs erőtérben a hang függőlegesen lefelé, felfelé és vízszintesen egyaránt ugyanúgy terjed). A megmaradt tagok kapcsolata a lineáris akusztikai mozgásegyenlet,

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} grad(p')$$

A kontinuitás- és mozgásegyenletekben három független hangtéri változó (ρ', v' és p') szerepel, a megoldáshoz kell egy harmadik független egyenlet. Ebben a hely- és időfüggő energiaegyenlet felírása érdemben nem segít, mert benne egy újabb ismertlen (T') szerepel. A megoldás érdekében a harmadik független egyenletet a korábbi algebrai modellből vesszük (a számunkra jelenleg fontos hely- és időfüggést a lineáris akusztikai kontinuitás- és mozgásegyenletek már tartalmazzák),

$$\frac{p'}{\rho'} = a^2 = \kappa R T_0$$

Az előző egyenletben a bal oldal a kontinuitás és mozgásegyenletek összevonásából származik, de az, hogy a hangsebesség négyzete állandó, az energiaegyenlet és a gáz állapotegyenlet alapján derült ki. A változók számának csökkentése (a részecskesebesség kiejtése) érdekében deriváljuk a kontinuitás egyenletet az idő szerint, illetve vegyük a mozgásegyenlet divergenciáját,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} div\left(\underline{v}'\right) = 0 \qquad \text{, illetve} \qquad div\left(\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\rho_0} div\ grad(p') = -\frac{1}{\rho_0}\Delta p'$$

Ahol a Laplace operátor,

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

A vegyes másodrendű deriváltak egyenlőségét figyelembe véve, a mozgásegyenlet divergenciájának jobb oldalát az idő szerinti derivált kontinuitás egyenlet bal oldalán a második tagba helyettesítve,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0$$

A hangsebesség négyzet kifejezésből származó, $\rho' = p'/a^2$ felhasználásával, a homogén lineáris akusztikai hullámegyenlet,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0$$

Megjegyzések:

- A homogén lineáris akusztikai hullámegyenlet egy másodrendű, hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenlet, a hangterjedés és a hangterek leírására szolgáló alapegyenlet. Jelentőségét a belőle levonható fizikai következtetések, az egyszerű esetekre vonatkozó analitikus megoldásai és a bonyolult esetekre vonatkozó numerikus szimulációs megoldásai adják.

- A hullámegyenletet más fizikai jelenségre (húrokban terjedő mechanikai zavarásterjedés leírására), de lényegét tekintve hasonló hullámterjedésre, először d'Alembert vezette le, ezért a szakirodalom számos helyen a d'Alembert-egyenlet néven említi.

- Attól függően, hogy a levezetés során mely változókat ejtjük ki, vagy a lineáris algebrai kapcsolatrendszerrel p'-t melyik változóra cseréljük ki, a többi hangtéri változóra (v', T' és ρ') is az előző hullám-egyenlettel megegyező alakú egyenlet vezethető le. Ez a formálisnak tűnő matematikai tény fizikailag azt jelenti, hogy a hangterjedés során a hangtéri jellemzők térben és időben egyszerre (szimultán) változnak.

- Különböző közegekben a hangsebesség nagyságrendje általában $10^2 \ldots 10^4$ közötti értékek, így a hullám-egyenlet átrendezésével belátható, hogy hangterekben a hely szerinti változékonyság sokkal kisebb, mint az idő szerinti.

- A fizika más területein, más jelenségekkel (húrok, membránok mozgása, szabadfelszíni közegmozgás, fénytan, elektromágnesesség, …) kapcsolatban, természetesen más fizikai változóra, de ugyanilyen alakú differenciálegyenlet vezethető le. Ezek a jelenségek mindegyike rendelkezik hullámtermészettel. Ezért az előzőrészben levezetett, illetve a vele megegyező alakú egyenleteket hullámegyenletnek nevezzük.

- A homogén akusztikai hullámegyenlet az egyszerűsítő feltételek következtében a hangtér leírására alkalmas. Figyelembe véve a hang hullámtermészetét, ez önmagában is nagy feladat. A levezetés során néhány egyszerűsítő feltétel (pl.: súrlódásmentes, hőszigetelő közeg) elhagyásával olyan egyenlet vezethető le, amely bal oldala a homogén hullámegyenlet bal oldalával megegyezik, de a jobb oldala nem nulla. Ezt az egyenletet inhomogén hullámegyenletnek nevezzük, segítségével a hangkeltés és a hangcsillapodás is leírhatóvá válik.

- A homogén akusztikai hullámegyenletnek általános és részmegoldásai vannak. Konkrét esetre vonatkozóan a megoldáshoz egy kezdeti és két peremfeltételre is szükség van.

A homogén, lineáris, akusztikai hullámegyenlet megoldásai

Mérnöki szempontból egy egyenlet annyit ér, amennyire megoldható. Ezért kiemelt figyelmet szentelünk a hullámegyenlet különböző megoldásaira. A hullámegyenlet megoldását hullámfüggvénynek nevezzük. A homogén hullámegyenlet általános megoldása mellett fontos részmegoldásai léteznek, illetve különbséget teszünk szabad- és határolt terekre vonatkozó megoldások között.

Hullámegyenlet általános megoldása

Végtelen kiterjedésű, homogén, folytonos közegben a hullámegyenlet általános megoldása a hullámfüggvény, amely szabad térben a tetszőleges $\underline{n}$ irányban haladó síkhullámokat írja le,

$$p'(\underline{r},t) = f\left(t - \frac{\underline{r}\,\underline{n}}{a}\right) + g\left(t + \frac{\underline{r}\,\underline{n}}{a}\right)$$

Megjegyzések:

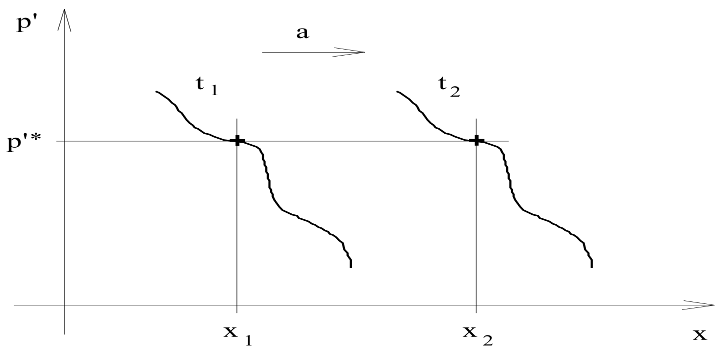
- A megoldás két tetszőleges függvény (f és g) összege, amelyek argumentumában, szokatlan módon, a független változók (t és $\underline{r}$) felsorolása helyett, azok egyszerű függvény kapcsolata található.

- Az f és g kétszer folytonosan differenciálható, alapvetően tetszőleges függvények, vagyis a mechanikai zavarás alakjára a hullámegyenlet nem tesz megkötést. Ennek az elsőre meghökkentő ténynek a fizikai tartalma az, hogy tetszőleges gerjesztés képes hullámot létesíteni. Ezt a hangok sokféleségére vonatkozó gyakorlati megfigyelés is alátámasztja.

- A hullámfüggvény argumentuma is fontos tartalmat rejt. Ennek megértéséhez vegyük a hullámegyenlet és az általános megoldás 1D alakját.

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p\prime}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p\prime}{\partial x^2} = 0 \qquad\qquad p'(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right) + g\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

Első lépésben vizsgáljuk a „f” függvény összetevőt, a megértést segíti a következő ábra.



Pozitív x irányban mozgó hullám hangnyomás megoszlása a hely függvényben t_1 és t_2 pillanatban

Válasszuk ki a hullámfront t_1 időpontban x_1 helyen tartózkodó csillaggal jelzett pontját. Ebben a pontban a hangnyomás értéke p'*. A hullámfront csillaggal jelzett pontja valamivel később, t_2 időpontban, a hang hullámtermészetének köszönhetőn balról jobbra, az x_2 pontba mozdul el. Síkhullám hangterjedés esetén a hangsugarak nem tartanak szét (nem divergálnak) és nem tartanak össze (nem fókuszálódnak). Továbbá a kiinduló egyszerűsítő feltételeknek köszönhetően a hangterjedés során nem lép fel veszteség (nincs csillapítás), és nem keletkezik hang (nincs hangforrás), így a hullámfront csillaggal jelzett pontjában az új t_2 időpontban és x_2 helyen a hangnyomás értéke ugyanakkora, mint a kiindulásnál volt. Visszatérve a megoldásfüggvényhez,

$p'^*(x_1,t_1) = p'^*(x_2,t_2)$ esetünkben az „f” összetevőt vizsgálva, $f\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right) = f\left(t_2 - \frac{x_2}{a}\right)$

Tetszőleges „f" függvény esetén az egyenlőség akkor áll fenn, ha „f"-be ugyanazt a számot helyettesítjük be,

$$t_1 - \frac{x_1}{a} = t_2 - \frac{x_2}{a} \qquad \text{átrendezést követően,} \qquad a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

A bemutatott levezetéssel megerősítést kaptunk arra a korábbi ismeretünkre, amely szerint az argumentumban szereplő „a" változó a hullámfront egy kiszemelt pontja által megtett távolság, x_2-x_1 és az eközben eltelt idő t_2-t_1 hányadosa, a hangsebesség. Az argumentum, sajátos matematikai nyelvén, a hullám haladó jellegét fejezi ki. Hasonló gondolatmenettel megállapítható, a megoldás függvény másik, „g" összetevője a mínusz x irányban haladó hullámokat írja le.

- Összefoglalva, a hullámegyenlet általános megoldása a szabadon terjedő síkhullámokat írja le. Két fontos fizikai jelentése, hogy tetszőleges mechanikai zavarás terjedni fog és a terjedési sebesség nagysága „a".

Harmonikus hullámok:

Harmonikus gerjesztés hatására harmonikus hullám keletkezik. A harmonikus hullám (más néven monokromatikus hullám vagy tiszta hang) szinusz illetve koszinusz függvénnyel írható le. A hullámegyenlet megoldásai közül a harmonikus hullámok kiemelt jelentősége egyrészt avval magyarázható, hogy a harmonikus hullámot leíró szinusz és koszinusz függvények a harmonikus (spektrális) elemzés alapelemei, másrészt a véges méretű, rugalmas anyagok (pl.: légoszlop csőben, két pont között kifeszített húr, harang) szabad rezgései harmonikus rezgések, vagy azok összetétele, így az általuk létrehozott hang harmonikus hullám, vagy azok összetétele lesz.

A harmonikus mozgások leírására alkalmas szinusz és koszinusz függvény argumentuma szög mértékegységű (radián), így az általános megoldásban található idő mértékegységű argumentumról szög mértékegységűre kell áttérni, amellyel bevezetjük a hullám állapotára jellemző fázisszög fogalmát,

$$\omega\left(t - \frac{x}{a}\right) = \omega t - \frac{\omega}{a}x = \omega t - kx$$

A megoldásfüggvény f és g tetszőlegesen bővíthető, így az argumentum megszorzása a szögsebesség (ω) értékével megengedett (az összefügés jobb oldalán k a hullámszám). A harmonikus rezgőmozgásokhoz hasonlóan a harmonikus hullámoknál is adott időpontban és helyen a hangtéri változó értéke egy ω szögsebességgel forgó amplitúdó vektor x valós tengelyre leképzett vetületi értékével egyenlő. A rezgések esetében a forgó amplitúdó vektor szöghelyzete (fázisszöge) csak az időtől függ, a hullámok esetében azonban a forgóvektor fázisszögét az idő és hely koordináta együtt határozza meg. A fázisszög utolsó kifejezése alapján jól látható, hogy tetszőleges időpontban a kezdőponthoz képest x távolságban lévő pontban kx értékkel kell csökkenteni (retardálni) a fázisszöget a hangtéri változó meghatározásához. Ezek figyelembe vételével, a pozitív x tengely irányában haladó, $\hat{p}$ amplitúdójú, ω szögsebességű harmonikus hanghullám hullámfüggvénye a hangnyomás változóra,

$$p'(x,t) = \hat{p} \cdot cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Ahol:

Jel	Mértékegység	Név	Jelentés
p'(x,t)	[Pa]	hangnyomás	hangtérben az egyensúlyi értékhez képest kialakuló nyomáskülönbség
$\hat{p}$	[Pa]	hangnyomás amplitúdó	az egyensúlyi értékhez képest a legnagyobb eltérés nagysága
$\omega t - kx + \varphi_0$	[rad]	fázisszög	forgó amplitúdóvektor pozíciója
ω=2π/T	[rad/s]	szögsebesség, szögfrekvencia	a hullám által időegység alatt megtett fázisszög
T	[s]	periódus idő	x= áll. helyen a hullám két szomszédos, azonos fázis állapota között eltelt idő (pl. két szomszédos pozitív maximum közötti idő)
f=1/T	[Hz]	frekvencia	időegység alatti periódusok száma
k=2π/λ	[rad/m]	hullámszám	a hullám által hosszúság egységen befutott fázisszög

λ	[m]	hullámhossz	t= áll. időpontban a hullám két szomszédos, azonos fázis állapota között mérhető távolság (pl. két szomszédos pozitív maximum közötti távolság)
φ_0	[rad]	kezdőfázis	t= 0sec időben és x= 0m helyen a hullám tetszőleges fázisát beállító szög

Harmonikus hullámoknál az azonos zavarási állapotban lévő folyadékrészeket tartalmazó felületet a forgóvektor azonos fázisszöge miatt fázisfelületnek hívjuk. Legyen a kezdőfázis φ_0= 0 rad, és emeljük ki a harmonikus hullámfüggvény argumentumából a szögsebességet,

$$\omega t - kx = \omega\left(t - \frac{x}{\omega/k}\right) = \omega\left(t - \frac{x}{a_f}\right)\ ,\quad a_f = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T}$$

Ahol „a_f" a harmonikus hullám fázissebessége, adott fázishoz tartozó zavarási állapot terjedési sebessége.

Harmonikus hullámok komplex exponenciális írásmódja: A harmonikus hullámokkal kapcsolatos levezetések során az exponenciális leírás számos esetben előnyösebb, mint a trigonometrikus (pl. deriválás, integrálás esetén). A komplex hangnyomás felírásához a hullámfüggvényt kiegészítjük egy képzetes taggal, a trigonometrikus alakot exponenciálisra átírva, a helytől és időtől függő és nem függő tagokat szétválasztva a komplex hangnyomás (**p'**(x,t)),

$$\boldsymbol{p}'(x,t) = \hat{p}\cdot cos(\omega t - kx + \varphi_0) + i\cdot\hat{p}\cdot sin(\omega t - kx + \varphi_0) = \hat{p}\cdot e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)} =$$

$$= \hat{p}\cdot e^{i\varphi_0}\cdot e^{i(\omega t - kx)} = \hat{\boldsymbol{p}}\cdot e^{i(\omega t - kx)}$$ ahol a komplex hangnyomás amplitúdó, $\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{p}\cdot e^{i\varphi_0}$

A komplex hangnyomás amplitúdó a legnagyobb kitérés mellett a kezdőfázist is tartalmazza. Valós fizikai jelentése azonban csak a komplex hangnyomás valós részének van. Így a levezetések végén, a formális matematikai előnyök kihasználását követően, a tényleges hangtéri jellemző meghatározása érdekében a komplex mennyiség valós részét kell venni,

$$p'(x,t) = Re\big(\boldsymbol{p}'(x,t)\big)$$

1.2. Gyakorló feladatok

Gy.1. Az áramlástan alapegyenleteiből kiindulva vezesse le a hangnyomásra vonatkozó homogén akusztikai hullámegyenlet 3D alakját! A levezetés minden lépését írja le, az egyszerűsítő feltételeket, illetve az elhanyagolásokat indokolja! Adja meg az egyenlet alkalmazásait és írja fel a kapott egyenlet tetszőleges $\underline{n}$ irányban haladó síkhullámokat leíró általános megoldását!

Gy.2. Hosszú csőben egy membrán f=225 Hz frekvenciájú, dugattyúszerű harmonikus rezgő mozgást végez. A membrán legnagyobb sebessége (v_{max}) 0,006m/s. A kezdeti pillanatban a membrán közép-helyzetben van és maximális sebességgel a cső jobb oldali része felé mozog. Határozza meg a levegővel kitöltött cső belsejében a membrántól jobbra, 226m távolságban, a kezdő pillanathoz képest 145sec-al később kialakuló részecskesebesség értékét! A levegő hőmérséklet (t) 250°C, adiabatikus kitevő (κ) 1,4.

$a = \sqrt{\kappa R T_0} = \sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot(273+250)} \approx 458{,}4\ \ m/s$

$\omega = 2\pi f = 2\cdot\pi\cdot 225 \approx 1413{,}7\ \ rad/sec$

$k = \omega/a \approx 1413{,}7/458{,}4 \approx 3{,}1\ \ rad/m$

φ_0= 0 rad

$v'(x,t) = \hat{v}\cdot cos(\omega t - kx + \varphi_0) = 0{,}006\cdot cos(1413{,}7\cdot 145 - 3{,}1\cdot 226 + 0) = 0{,}0046\ \ m/s$
