Alkalmazott áramlástan és akusztika

(önálló felkészülést segítő tananyag az akusztika részhez)

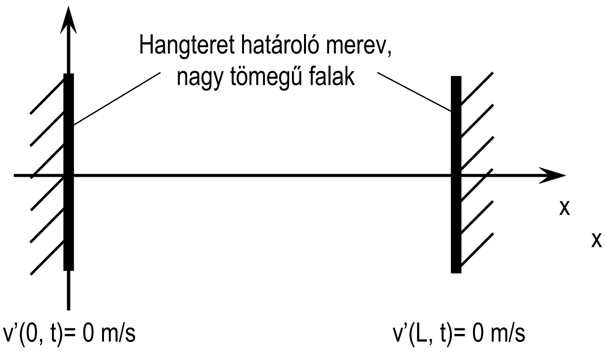
Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

2. előadás

Tartalom:

2.1. A homogén hullámegyenlet megoldása határolt térben

A hullámegyenlet általános megoldása és harmonikus részmegoldása szabadtéri hangterjedést ír le, amely esetén az egyenes vonalú hangterjedést semmi sem akadályozza, visszaverődések nem alakulnak ki. Ez a feltétel számos akusztikai feladat (pl.: egy épület tető szintjén, szabad térben működő ventilátor által a szomszédos épület homlokzata előtt okozott zajterhelés meghatározása) megoldásánál jól alkalmazható. A hangtani feladatok másik része terjedést akadályozó falakkal határolt, zárt térre vonatkozik. A hangtér lehatárolása a hangforrás által létrehozott hangtér jellemzőit jelentősen megváltoztatják a szabadtéri esethez képest (a közvetlen besugárzás mellett a visszaverődéseket is figyelembe kell venni). Határolt térben a hullámakusztikai modell további más fontos jelenségekre hívja fel a figyelmünket, ezért a jelenséget érdemes részletesen megvizsgálni. A korábbiakhoz hasonlóan a hullámegyenlet határolt térre vonatkozó megoldását első lépésben vizsgáljuk egydimenziós esetre. Ehhez az x tengely mentén x= 0 m és x= L m távolságokban a tengelyre merőlegesen helyezzünk el két nagy tömegű, merev (erő hatására nem deformálódó), a hang számára átjárhatatlan, légtömör (nem porózus, nincsenek rajta lyukak) falat (ld.: következő ábra).



Hangtér lehatárolása hangterjedést akadályozó merev, nagy tömegű, légtömör falakkal

Az áramlástan tapadás törvénye (szilárd test felület és a vele szomszédos folyadékréteg között a relatív sebesség nulla) alapján, ha a határoló falak tartós nyugalomban vannak, a velük szomszédos folyadékréteg sebessége is nulla, peremfeltételek a részecskesebességre x= 0 m és x= L m helyeken,

$$v'(0, t)= 0\ \text{m/s} \qquad \text{és} \qquad v'(L, t)= 0\ \text{m/s}$$

A falak jelenléte a hang áramlási természetét, és az ehhez kapcsolódó matematikai modellt nem befolyásolja. A kontinuitás-tétel, mozgás-törvény, energia-mérleg és az ideális gáztörvény határolt térben is teljesülnek, így a matematikai modell megalkotásánál a hullám-egyenletből indulunk ki. A peremfeltételeket a részecskesebességre tudjuk könnyen megadni, ezért a határolt téri megoldás meghatározásához a részecskesebességre vonatkozó hullámegyenlet,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}=0$$

Az egyenlet általános megoldása,

$$v'(x,t) = f(at - x) + g(at + x)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a peremfeltételek az általános megoldást hogyan változtatják meg! Az általános megoldásba x= 0 m-nél behelyettesítve,

$$v'(0,t) = 0 = f(at - 0) + g(at + 0)\text{ , átrendezve, } f(at) = -g(at)$$

A „f" függvény összetevő helyére írjuk be „- g" –t és helyettesítsünk be az x= L m-nél,

$$v'(L,t) = 0 = f(at - L) + g(at + L) = -g(at - L) + g(at + L)$$

A „g" függvényt (-L) értékkel eltolva és átrendezést követően megállapítható, hogy a „g" függvény 2L szerint periodikus,

$$g(at) = g(at + 2L)$$

Összegezve, a peremfeltételek az általános megoldást korlátozzák, tetszőleges jellegük helyett, az „f és „g" összetevők egymással megegyeznek, de ellentétes előjelűek, és 2L szerint periodikusak. A periodikus „g" függvény Fourier-sora,

$$g(at \pm x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n cos\frac{2\pi n}{2L}(at \pm x) + \beta_n sin\frac{2\pi n}{2L}(at \pm x)\right]$$

A Fourier-sor egyes n értékekhez tartozó összetevők fizikai értelemben harmonikus hullám összetevők, így a hossz mentén adódó 2L szerinti periódus valójában a hullámhossz (λ). Így a 2π/2L hányados a hullámszám (k=2π/λ), a koszinusz és szinusz függvények argumentumában a zárójeles tag együtthatója,

$$\frac{2\pi n}{2L} = \frac{2\pi}{\lambda} n = k \cdot n = k_n \text{ , ahol n= 1, 2, 3, … (természetes számok)}$$

A hullámegyenlet határolt térben érvényes megoldásának meghatározása érdekében helyettesítsük be a Fourier sor megfelelő előjelű tagjait, és alkalmazzuk az új jelölést,

$$v'(x,t) = f(at - x) + g(at + x) = -g(at - x) + g(at + x) =$$

$$= -\frac{\alpha_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n cosk_n(at - x) + \beta_n sink_n(at - x)] +$$

$$+\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n cosk_n(at + x) + \beta_n sink_n(at + x)]$$

Az ellentett előjele miatt az $\alpha_0/2$ egyensúlyi tag kiesik, amely fizikai jelentése az, hogy a határoló falak jelenléte miatt a hangtéri jellemzők egyensúlyi értéke (pl.: egyensúlyi nyomás) nem változik meg. A sor összegek összevonásával, és az együtthatók kiemelését követően,

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\left(cosk_n(at + x) - cosk_n(at - x)\right) + \beta_n\left(sink_n(at + x) - sink_n(at - x)\right)\right]$$

A szög összeg és különbség szinuszának és koszinuszának felbontárára vonatkozó azonosságok felhasználásával,

$$v'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[-2\alpha_n sink_n at\ sink_n x + 2\beta_n cosk_n at\ sink_n x]$$

A $k_n a$ szorzat az n-ik harmonikus összetevő szögfrekvenciája (ω_n), továbbá a helytől függő szinuszos tag kiemelésével, a homogén akusztikai hullámegyenlet egydimenziós határolt téri megoldása,

$$v'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[sink_n x(-2\alpha_n sin\omega_n t + 2\beta_n cos\omega_n t)]$$

Ahol: $k_n = \frac{2\pi}{2L}n$, illetve $\omega_n = k_n a = \frac{2\pi}{2L}na$

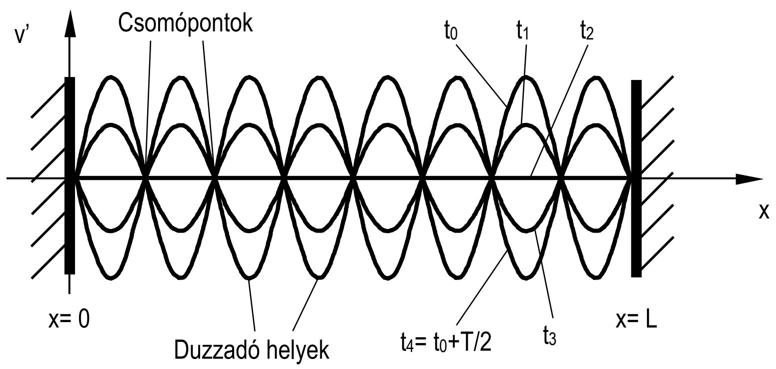
Megjegyzések:

- A hullámegyenlet általános és határolt téri megoldása között a legfontosabb különbség, hogy a hullámot leíró függvény argumentumában a hely- és időváltozó az általános megoldásban együtt, a határolt téri megoldásban külön-külön szétválasztva (szeparálva) szerepelnek. A (t±x/a) argumentum a hullám haladó jellegére utal. A határolt téri megoldásban az x és t változók szeparálódása a hullám haladó jellegének megszűnését jelzi. A két fal jelenléte a hang szabad terjedését ténylegesen, fizikailag korlátozza, és ezt a tényt a matematika a sajátos nyelvén (a változók szeparálódásával) fejezi ki.

- Vegyük a részecskesebességre megoldásként kapott sor összeg n-ik elemét, legyen $-2\alpha_n = \hat{v}$, illetve β_n legyen 0,

$$v'_n(x,t) = \hat{v}\ sin\omega_n t\ sink_n x$$

A részecskesebesség a két fal között minden pontban, ahol $k_n x$= 0, π, 2π, 3π, … (természetesen az x= 0 és x= L helyen is) az időtől függetlenül 0 m/s, ezek a hullám csomópontjai. π/2 radiánnal eltolva, ahol $k_n x$= π/2, 3π/2, 5π/2, …a hullám amplitúdója maximális értéket vesz fel, ezek a hullám duzzadó helyei. További lényeges különbség, hogy két csomópont közötti szakaszon minden folyadékrész azonos fázisban mozog, vagyis egyszerre mozognak jobbra illetve balra, csak az amplitúdójuk tér el egymástól. A haladó hullám a két fal jelenlétében folytonos, rugalmas közeg lengéssé alakult, amelyet csomópontok és duzzadóhelyek periodikus rendszere jellemez (ld.: következő ábra).



A részecskesebesség megoszlás két fal között kialakuló hullámtérben különböző (t_0, t_1, …) időpontokban (t_4 időpont t_0 –hoz képest fél periódusidővel később)

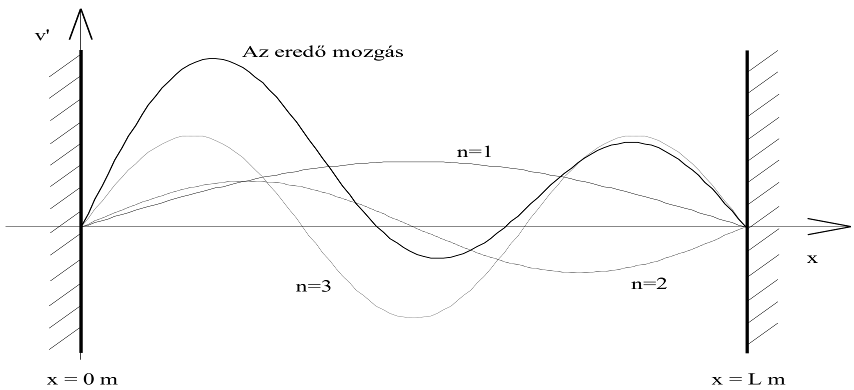
- Az α_n és β_n (Fourier) együtthatók a v', részecskesebesség kezdő pillanatban (t= 0) érvényes eloszlásából, a kezdetiérték feltételből határozhatók meg.

- Matematikai szaknyelven a ω_1, ω_2, ω_3, …, illetve a k_1, k_2, k_3, …, konstansok a feladat sajátértékei. Az ω_1 a rendszer alapharmonikusa (vagy alap szögfrekvenciája), a többi ω_2, ω_3, … étékek a felharmonikusok. Az ω és k értékek egy konkrét akusztikai elrendezés (falak közötti távolság, hangsebesség, …) esetére vonatkoznak. A sajátértékeket visszahelyettesítve a határolt téri megoldásfüggvényekbe a sajátfüggvényeket kapjuk,

$$v'_1(x,t) = sink_1x(-2\alpha_1 sin\omega_1 t + 2\beta_1 cos\omega_1 t)$$
$$v'_2(x,t) = sink_2x(-2\alpha_2 sin\omega_2 t + 2\beta_2 cos\omega_2 t)$$
$$v'_3(x,t) = \cdots$$

amelyek a hullámegyenletet és a csatlakozó peremfeltételeket egyaránt kielégítik.

- Nagyon fontos belátni, hogy a sajátfüggvények csak a rendszerben lévő lehetőségek. Az, hogy a hangtérben mi szólal meg, alapvetően a gerjesztéstől függ. Ha valaki vastag falakkal határolt térben elkezd beszélni, a hangtérben alapvetően a megszólaló személy hangja lesz hallható. A sajátfüggvényeket a hangtérben úgy lehet előcsalogatni, hogy egy impulzusos (rövid ideig tartó) hangkeltéssel (pl.: taps) kezdő zavarási állapotot (kezdeti feltételt) hozunk létre, amely hatására a hangtérben a részecskék mozgásba kezdenek. A kezdő lökés után magára hagyott rendszer ezt követően sajátrezgéseket végez, mint a megfeszített, majd elengedett tömeg-rugó egyszabadságfokú rezgőrendszer, vagy a megpendített gitárhúr. (Amíg az egyszabadságfokú rezgőrendszer egy sajátfrekvencián végez rezgést, a két fal közé zárt légoszlop és a két pont között kifeszített húr, mint a folytonos közeg egy véges darabja, tetszőleges számú, diszkrét frekvencián képes rezegni.) A sajátfüggvény szoros összefüggésben az előző magyarázattal innen is származtatható, hiszen a kezdeti, impulzusos gerjesztés után magára hagyott rendszer saját mozgását (-rezgését) írja le. Alkalmas kezdeti hangkeltés hatására létrejött egyszerű hullámtér első három összetevő (alap frekvencia és a szomszédos két felharmonikus), illetve az eredő mozgás részecskesebesség megoszlását mutatja a hely függvényében egy adott pillanatban a következő ábra.



Egyszerű hangtérben az alap és az első két felharmonikus, illetve az eredő hullám részecskesebesség megoszlása a hely függvényében rögzített pillanatban

- Határolt térben a hullámegyenlet megoldását a peremfeltételek miatt a részecskesebesség változóra határoztuk meg. Méréstechnikai szempontból a hangnyomás ismerete is fontos lehet. A hangnyomás függvény meghatározása érdekében legyen az előző részben levezetett sebességteret leíró hullámfüggvény n=1 (alap frekvencia) esetre, az 1-es indexeket az egyszerűsítés érdekében elhagyjuk,

$$v'(x,t) = \hat{v}\, sin\omega t\; sinkx$$

A hangnyomás és a részecskesebesség között a lineáris akusztikai mozgásegyenlet teremt kapcsolatot. A mozgásegyenletből a hangnyomást kifejezve, v'-t behelyettesítve a hangnyomás függvény,

$$p'(x,t) = -\rho_0 \int \frac{\partial v'}{\partial t} dx = -\rho_0 \int \frac{\partial}{\partial t} (\hat{v}\ sin\omega t\ sinkx) dx = \rho_0 \frac{\omega}{k} \hat{v}\ cos\omega t\ coskx =$$

$$= \rho_0 a \hat{v}\ sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) sin\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) = \hat{p}\ sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) sin\left(kx + \frac{\pi}{2}\right)$$

A hangnyomás függvényben a hangnyomás amplitúdó az algebrai kapcsolatrendszerben már levezetett mozgásegyenlettel megegyező (a magasabb szintű, hely- és időfüggő matematikai modell az algebrai leírást magában foglalja). A hely- és az időfüggés függvény alakja, illetve x és t együtthatói (ω és k) a részecskesebességre és a hangnyomásra ugyanazok (a hangtéri változók szimultán változnak). A hangnyomás hullámfüggvényre adódó koszinuszokat szinuszokra átírva könnyen belátható, hogy a részecskesebesség és a hangnyomás között a hely- és időfüggésben egyaránt π/2 fázisszög (negyed periódus) különbség adódik. (Szabadon terjedő síkhullámoknál a részecskesebesség és a hangnyomás között nincs fáziskülönbség.)

- A két fal közé zárt véges hosszú légoszlop rezgését, a falak közé helyezett, két végén a falakhoz mereven hozzáerősített spirálrugó tengelyirányú rezgésével szemléltethetjük. A spirálrugót középső részénél tengely irányban balra elhúzva, majd hirtelen elengedve az alapharmonikus mozgás négy jellegzetes szakaszra bontható. Az első szakaszban a rugó közepe maximális sebességgel jobbra halad, ekkor a rugó feszültségmentes. Negyed periódussal később a jobb oldalra tömörödött rugó mozgása egy pillanatra megáll, jobb szélen maximális nyomó, bal szélen maximális húzóerő keletkezik. Újabb negyeddel később a rugó ismét feszültségmentes és a közepe maximális sebességgel balra tart. Az utolsó negyedben a bal oldalra tömörödött rugó mozgása egy pillanatra ismét megáll, miközben jobb szélen maximális húzó-, bal szélen pedig nyomóerő lép fel. Hasonló mozgást végez a két oldalán falakkal határolt légoszlop is (a hangtérben az erő a hangnyomásnak, a sebesség a részecskesebesség változónak felel meg).

- Felmerül a kérdés, mi a jelentősége a mérnöki gyakorlatban a hullámegyenlet határolt téri megoldásának, a sajátfüggvényeknek és sajátrezgéseknek. Folyadékot számos alkalommal csővezetékben szállítunk. A csővezetékben tartózkodó folyadék úgy tekinthető, mint a rugalmas, folytonos közeg véges hosszú darabja, amely adott frekvenciákon sajátrezgések végzésére képes. Ha a csőben a mozgást térfogatkiszorítás elvű áramlástechnikai gép hozza létre, a periodikus működés miatt a szállított közeget adott frekvencián gerjesztés éri. Ha a gerjesztési frekvencia megegyezik a sajátfrekvenciák valamelyikével, rezonancia alakul ki. A rezonancia során kialakuló nagy amplitúdójú mozgás jelentős mechanikai terhelést okoz a rendszerben, amely rendellenes működést, végső esetben meghibásodást okozhat. Fontos megjegyezni, hogy a levezetés során kis amplitúdójú hullámokat feltételeztünk. Rezonancia során az amplitúdó nagysága jelentősen növekedhet, amely miatt a lineáris modell pontossága rosszabb lesz. A csővezetékek dinamikus viselkedésének ismerete alapvető gépész szaktudás, a hullámegyenlet határolt téri megoldása ehhez nyújt bevezető ismereteket. A rezonancia az akusztikában fontos jelenség, ezért a későbbiekben még részletesen foglalkozunk vele.

- A véges méretű, folytonos rugalmas közegben az alaktól és a gerjesztés jellegétől függően 2 és 3 dimenziós lengések is kialakulhatnak. A teremakusztika egy alapvető problémája a helyiségekben kialakuló teremhangok (léghang sajátfrekvenciák) miatti kiemelések és gyengítések hatásának csökkentése. De többdimenziós kontinuum rezgések nem csak folyadékokban, hanem szilárd rugalmas anyagban, például egy harang fém köpenyében, vagy egy fogaskerékben is kialakulhatnak.

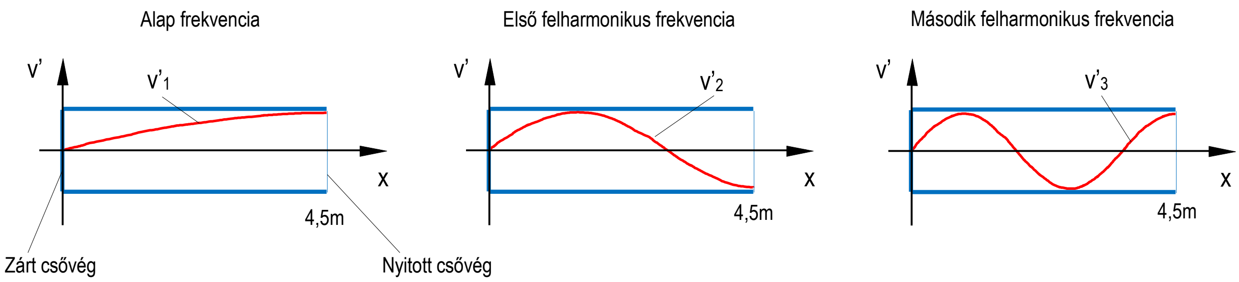
2.2. Gyakorló feladatok

Gy.1. Számítsa ki egy 4,5m hosszúságú, egyik végén zárt, másik végén nyitott csőben a levegő oszlop első és harmadik akusztikai sajátfrekvenciáját! A levegő hőmérséklet (t) 25°C.

Megoldás:

$$a = \sqrt{\kappa R T_0} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot (273 + 25)} \approx 346\ m/s$$

A kialakuló jelenség a korábban ismertetett határolt térben érvényes hullámegyenlet megoldás alapján, a peremfeltételeket kielégítő harmonikus kontinuum rezgés. A harmonikus rezgéseket szinusz és koszinusz függvények írják le. A peremfeltételek fizikai szemlélet alapján a részecskesebességre könnyen megadhatók. Zárt csővégeken a részecskesebesség nulla. Ha a cső zárt vége nyugalomban van, az áramlástan tapadás törvénye értelmében a vele éppen szomszédos folyadékréteg is áll. A nyitott csővégeken a mozgást semmi sem akadályozza, a részecskesebesség maximális. Adott csőszakaszhoz a sajátrezgés hullámhossza akkor megfelelő, ha zárt csővégre a szinusz nulla értéke, nyitott csővégre a szinusz maximuma (előjeltől függetlenül) esik. Esetünkben a megoldás grafikus származtatásához belátható, a sajátrezgések részecskesebesség megoszlása a cső zárt végén nulla, a nyitott végén rendre a szinusz függvény legnagyobb abszolút értékű helyével esik egybe. A legkisebb frekvenciához tartozik a legnagyobb hullámhossz, illetve legkevesebb szinusz periódus, növekvő frekvenciához csökken a hullámhossz, növekszik a csőszakaszra eső szinusz periódusok száma, ld. ábra.



Egyik végén zárt, másik végén nyitott csőben kialakuló kontinuum rezgések részecskesebesség megoszlása a hossz mentén az első három saját frekvencia esetén

Első sajátfrekvencia: A peremfeltételek alapján a részecskesebesség megoszlás grafikonja a minimumtól a szomszédos maximumig tartó negyed szinusz periódus, a hullámhossz: $\lambda_1 = 4 \cdot l/1 = 4 \cdot 4{,}5 = 18\ m$

$f_1 = a/\lambda_1 \approx 346/18 \approx 19{,}2\ Hz$

Harmadik sajátfrekvencia: A peremfeltételek alapján a részecskesebesség ábra a minimumtól a második maximumig tartó egy és egynegyed szinusz periódus, a hullámhossz: : $\lambda_3 = 4 \cdot l/5 = 4 \cdot 4{,}5/5 = 3{,}6\ m$, $f_3 = a/\lambda_3 \approx 346/3{,}6 \approx 96{,}1\ Hz$
