Alkalmazott áramlástan és akusztika

(önálló felkészülést segítő tananyag az akusztika részhez)

Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

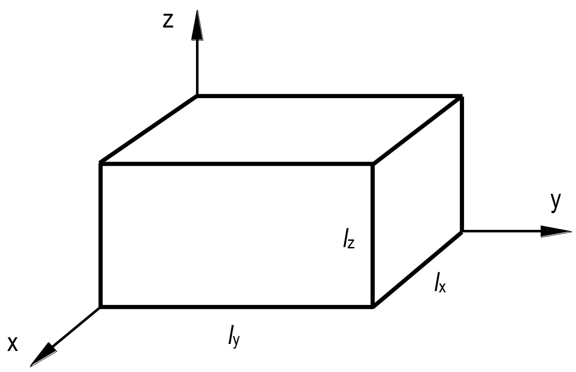
3. előadás

Tartalom:

3.1. A homogén hullámegyenlet megoldása 3D, téglatest alakú határolt térben (előadásvázlat)

3.2. Gyakorló feladatok

Az előző előadás során részletesen megvizsgáltuk, milyen fizikai következménnyel jár, ha az 1D szabad hangterjedés az x tengely mentén 2 határoló felület közötti tartományra korlátoztuk. A levezetésből kiderült, hogy a hangterjedést akadályozó (nagy tömegű, merev falak) között működő hangforrás hatására meghatározott frekvenciákon csomópontok és duzzadóhelyek periodikus rendszerével jellemezhető folytonos közeg (kontinuum) lengés alakulhat ki. Belátható, hogy az 1D-s jelenség 3D-ban is létrejöhet. A térben kiterjedt, véges méretű folytonos közegben kialakuló lengések jelentősége az akusztikában és a gépészeti gyakorlatban is egyaránt nagy. A következő levezetés az egyik legegyszerűbb 3D geometriai esetre, egy légnemű közeggel (pl.: levegővel) kitöltött téglatest alakú lehatárolt térre mutatja be a közeglengés matematikai modelljét.



Az l_x, l_y és l_z méretű, téglatest alakú hangtér

3.1. A homogén hullámegyenlet megoldása 3D, téglatest alakú határolt térben

A feladat térbeli jellege miatt a levezetés egyszerűsítése érdekében visszatérünk a hangnyomás (p') változó használatára. A részecskesebesség előnyös volt a peremfeltételek értelmezésénél, de általános esetben, térben az x, y és z irányok bármelyikében a részecskesebesség vektor három összetevője közül bármelyik megváltozhat, amely összesen 9 sebesség adat figyelemmel kísérését igényli. Ehhez képest a skalár jellegű hangnyomás megváltozása a három térkoordináta irányában a nabla operátor három összetevőjével leírható. Ez az előny kedvezőbb, mint a peremfeltételek átírása miatti nehézségek, így a levezetés kiindulása a hangnyomás változóra felírt 3D homogén akusztikai hullámegyenlet.

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0$$

Az 1D megoldásból kiindulva feltételezzük, hogy a hangteret leíró változók a 3D esetben is hely- és időváltozók szerint szeparálódnak és a hullámtér viselkedését leíró hullámfüggvény az egyes térkoordinátákat illetve az idő változót külön-külön tartalmazó függvényösszetevők szorzata lesz. Így a 3D hangteret leíró hangnyomás „próba" függvény, a 3D hullámegyenlet egy partikuláris megoldása,

$$p'(\underline{r},t) = f(x)\cdot g(y)\cdot h(z)\cdot e^{i(\omega t)}$$

Visszahelyettesítve a hullámegyenletbe,

$$f(x)\cdot g(y)\cdot h(z)\cdot \frac{1}{a^2}\cdot(i\omega)\cdot(i\omega)\cdot e^{i(\omega t)} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}gh + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}h + fg\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)e^{i(\omega t)} = 0$$

A hangnyomás „próba" függvénnyel elosztva az egyenlet mindkét oldalát,

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} = -\frac{\omega^2}{a^2} = -Konstans$$

A partikuláris (rész) megoldás egy adott frekvenciára vonatkozik, továbbá a homogén közegben a hangsebesség állandó, így a két mennyiség négyzetének hányadosa is állandó. Általános esetben az egyenlőség akkor teljesül, ha a bal oldalon minden egyes tag külön-külön is állandó.

$$\frac{f''}{f} = -K_1 \qquad \frac{g''}{g} = -K_2 \qquad \frac{h''}{h} = -K_3$$

Az 1D határolt téri megoldásnál a hullámfüggvényben a szeparált függvény összetevők szinusz és koszinusz függvények voltak. Megerősíti a felvetést, amely szerint az jelen esetben is alkalmazható, hogy a szinusz és koszinusz függvények második deriváltjai és az eredeti függvények hányadosa egy negatív konstans. Egyelőre még nem tudjuk, hogy szinusz vagy a koszinusz függvény lesz-e a megfelelő, ezért első lépésben vegyük mindkettőt. Így az f függvény az 1D megoldáshoz hasonlóan, de figyelembe véve, hogy még másik két térkoordináta mentén is lesznek összetevők, az x index bevezetésével,

$$f(x) = \alpha_{n_x} sin\frac{2\pi n_x}{2l_x}x + \beta_{n_x} cos\frac{2\pi n_x}{2l_x}x$$

Hasonlóan az 1D megoldáshoz a Fourier-sor egyes n értékeihez tartozó tagok fizikai értelemben harmonikus hullám összetevők, így a hossz mentén adódó $2l_x$ szerinti periódus valójában a hullámhossz (λ_x). Így a $2\pi/2l_x$ hányados az x irányhoz tartozó alap-hullámszám ($k_x=2\pi/\lambda_x$), a koszinusz és szinusz függvények argumentumában az x együtthatója,

$$\frac{2\pi n_x}{2l_x} = \frac{2\pi}{\lambda_x}n_x = k_x\cdot n_x = k_{n_x}$$, ahol n= 1, 2, 3, … (természetes számok)

Az előbbi forma azt segít megérteni, hogy a $2l_x$ hossz az alap hullámhossz (λ_x), ebből számolható az alap hullámszám (k_x), és a felharmonikus sorozat hullámszámok ennek egész számú többszörösei.

$$\frac{2\pi n_x}{2l_x} = \frac{2\pi}{\lambda_x}n_x = \frac{2\pi}{\frac{\lambda_x}{n_x}} = \frac{2\pi}{\lambda_{n_x}} = k_{n_x}$$, ahol n= 1, 2, 3, … (természetes számok)

Ez a forma arra világít rá, hogy a felharmonikus sorozatban a hullámhosszak, az alaphullámhossz és pozitív egész számok hányadosából számolható. Az új jelölés bevezetésével,

$$f(x) = \alpha_{n_x} sin(k_{n_x}x) + \beta_{n_x} cos(k_{n_x}x)$$

Az f függvény pontosítása érdekében térjünk vissza a peremfeltételekhez. Az x irány mentén a 0 és az l_x helyeken, a falak belső felülete mentén az áramlástan tapadás törvénye értelmében a részecskesebesség 0 m/s.

$$v'_x(0, t) = 0\ m/s \qquad \text{és} \qquad v'_x(l_x, t) = 0\ m/s$$

A részecskesebesség a falakkal közvetlenül szomszédos felület mentén tartósan nyugalomban van, így a feltétel a részecskesebesség idő szerinti parciális deriváltjára (lokális gyorsulásra) is igaz,

$$\frac{\partial v'_x(0,t)}{\partial t} = 0\ m/s^2 \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial v'_x(l_x,t)}{\partial t} = 0\ m/s^2$$

A lineáris akusztikai mozgásegyenlet x irányú összetevője,

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}$$

A lokális gyorsulásból kiindulva a mozgásegyenlet felhasználásával a hangnyomás változóra megfogalmazható peremfeltétel,

$$\frac{\partial p'(0,t)}{\partial x} = 0\ Pa/m \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial p'(l_x,t)}{\partial y} = 0\ Pa/m$$

A hangnyomás peremfeltétel alkalmazásához az f függvény hely szerint deriváltja,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_{n_x} k_{n_x} cos\left(k_{n_x} x\right) - \beta_{n_x} k_{n_x} sin\left(k_{n_x} x\right)$$

A peremfeltétel az x= 0m helyen az „f” függvény meghatározásához,

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x} = 0\ = \alpha_{n_x} k_{n_x} cos\left(k_{n_x} 0\right) - \beta_{n_x} k_{n_x} sin\left(k_{n_x} 0\right)$$

A kifejezés jobb oldalán az első tagban a koszinusz értéke egy, így a peremfeltétel teljesüléséhez a jobb oldalon a különbség akkor nulla, ha az α_{n_x} együttható értéke nulla. A kifejezés jobb oldalán a második tagban a szinusz értéke nulla, így a peremfeltétel teljesüléséhez a β_{n_x} együttható tetszőleges, nullától eltérő érték lehet. Hasonló eredményt kapunk az x= l_x helyen érvényes peremfeltétel esetén is,

$$\frac{\partial f(l_x)}{\partial x} = 0\ = \alpha_{n_x} k_{n_x} cos\left(k_{n_x} l_x\right) - \beta_{n_x} k_{n_x} sin\left(k_{n_x} l_x\right) =$$

$$= \alpha_{n_x} k_{n_x} cos\left(\frac{2\pi n_x}{2 l_x} l_x\right) - \beta_{n_x} k_{n_x} sin\left(\frac{2\pi n_x}{2 l_x} l_x\right) = \alpha_{n_x} k_{n_x} cos(\pi n_x) - \beta_{n_x} k_{n_x} sin(\pi n_x)$$

Az n_x= 1, 2, 3. … természetes számok behelyettesítésénél a koszinusz értéke (+1) vagy (-1), így a peremfeltétel teljesüléséhez az utolsó egyenlőség jel után a különbség akkor nulla, ha az α_{n_x} együttható értéke nulla. Az n_x= 1, 2, 3. … természetes számok behelyettesítésénél a szinusz értéke nulla, így a peremfeltétel teljesüléséhez a β_{n_x} együttható tetszőleges, nullától eltérő érték lehet. Mindkét peremfeltétel alapján egybehangzóan $\alpha_{n_x} = 0$ így az „f” függvény

$$f(x) = \beta_{n_x} cos\left(k_{n_x} x\right)$$

A hangtér leírásához az y koordináta mentén a „g”, illetve a z koordináta mentén a „h” függvényeket az „f” függvényhez hasonlóan határozzuk meg. A részleteket nagyobb lépésekben bemutatva, az 1D határolt téri megoldás illetve, a második derivált és az eredeti függvény hányadosának negatív állandó értéke alapján ebben az esetben is feltételezzük, a megoldást a szinusz és koszinusz függvények között kell keresni, így általános esetre,

$$g(y) = \alpha_{n_y} sin\left(k_{n_y} y\right) + \beta_{n_y} cos\left(k_{n_y} y\right)$$

$$h(z) = \alpha_{n_z} sin\left(k_{n_z} z\right) + \beta_{n_z} cos\left(k_{n_z} z\right)$$

A részecskesebesség y és z irányú összetevőire vonatkozó peremfeltételek,

$v'_y(0, t) = 0$ m/s és $v'_y(l_y, t) = 0$ m/s

$v'_z(0, t) = 0$ m/s és $v'_z(l_z, t) = 0$ m/s

A peremfeltétel y és z irányban, a részecskesebesség idő szerinti parciális deriváltra, a lokális gyorsulásra

$$\frac{\partial v'_y(0,t)}{\partial t} = 0\ m/s^2 \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial v'_y(l_y,t)}{\partial t} = 0\ m/s^2$$

$$\frac{\partial v'_z(0,t)}{\partial t} = 0\ m/s^2 \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial v'_z(l_z,t)}{\partial t} = 0\ m/s^2$$

Továbbá a peremfeltétel a hangnyomás változóra a lineáris akusztikai mozgásegyenlet felhasználásával,

$$\frac{\partial p'(0,t)}{\partial y} = 0\ Pa/m \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial p'(l_y,t)}{\partial y} = 0\ Pa/m$$

$$\frac{\partial p'(0,t)}{\partial z} = 0\ Pa/m \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial p'(l_z,t)}{\partial z} = 0\ Pa/m$$

Az y és z irányok mentén a hangnyomásra vonatkozó peremfeltételek csak az α_{n_y} és α_{n_z} együtthatók nulla értéke esetén teljesül, így a peremfeltételek figyelembe vételével a „g” és „h” függvényösszetevők,

$$g(y) = \beta_{n_y} cos\left(k_{n_y} y\right) \qquad \mathrm{h}(z) = \beta_{n_z} cos\left(k_{n_z} z\right)$$

A hullámegyenlet 3D határolt téri megoldásának meghatározásához térjünk vissza a változók szerint szeparált „próba” függvényhez és helyettesítsük be a peremfeltételek alapján meghatározott függvény összetevőket,

$$p'(\underline{r}, t) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) \cdot e^{i(\omega t)} = \beta_{n_x} cos\left(k_{n_x} x\right) \cdot \beta_{n_y} cos\left(k_{n_y} y\right) \cdot \beta_{n_z} cos\left(k_{n_z} z\right) \cdot e^{i(\omega t)} =$$

$$= B_n cos\left(k_{n_x} x\right) \cdot cos\left(k_{n_y} y\right) \cdot cos\left(k_{n_z} z\right) \cdot e^{i(\omega t)}$$

A 3D hullámegyenlet, illetve a benne szereplő Laplace operátor tagokra szétbontva,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0$$

Helyettesítsük vissza a falakkal határolt térben kialakuló hangteret leíró hullámfüggvényt a hullámegyenletbe,

$$\frac{1}{a^2} B_n cos\left(k_{n_x} x\right) \cdot cos\left(k_{n_y} y\right) \cdot cos\left(k_{n_z} z\right) \cdot (i\omega)^2 e^{i(\omega t)} -$$

$$-B_n(-1)k_{n_x}^2 cos\left(k_{n_x} x\right) \cdot cos\left(k_{n_y} y\right) \cdot cos\left(k_{n_z} z\right) \cdot e^{i(\omega t)} -$$

$$-B_n cos\left(k_{n_x}x\right)\cdot(-1)k_{n_y}^2\cdot cos\left(k_{n_y}y\right)\cdot cos\left(k_{n_z}z\right)\cdot e^{i(\omega t)}-$$

$$-B_n cos\left(k_{n_x}x\right)\cdot cos\left(k_{n_y}y\right)\cdot(-1)k_{n_z}^2\cdot cos\left(k_{n_z}z\right)\cdot e^{i(\omega t)}=0$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a határolt térre vonatkozó megoldás függvénnyel,

$$-\frac{\omega^2}{a^2}+k_{n_x}^2+k_{n_y}^2+k_{n_z}^2=0$$

Amelyből a falakkal határolt rugalmas közegben kialakuló folytonos közeglengés n_x, n_y, n_z módushoz tartozó sajátfrekvenciája,

$$\omega_{n_x n_y n_z}=\sqrt{a^2\left(k_{n_x}^2+k_{n_y}^2+k_{n_z}^2\right)}$$

A kapott eredményre vonatkozó részletes elemzés előtt tanulságos a kapott összefüggés felhasználásával konkrét számítás elvégzése. Feladatunk egy helyiségben kialakuló akusztikai sajátfrekvenciák meghatározása. A helyiség belső alapterületének hossza l_x=7m, szélessége l_y=9m, belső magassága l_z=4m, a helyiségben a levegő hőmérséklet 20ºC, a meghatározandó módusok adatait a következő táblázat tartalmazza.

Feladat sorszáma	n_x	n_y	n_z
1.	1	0	0
2.	0	1	0
3.	0	0	1
4.	1	1	0
5.	1	1	1
6.	15	10	7
7.	16	10	7

Az 1., 2. és 3. sorszámú esetek a helyiség 1D alap módusai, a 4. feladat egy 2D alap módus, az 5. egy 3D alap módus, illetve a 6. és 7. esetek 3D egymáshoz közel eső, magasabb számú módusok. A feladat megoldásához a hangsebesség,

$$a=\sqrt{\kappa RT_0}=\sqrt{1{,}4\cdot 287\cdot(273+20)}\approx 343{,}1\ m/s$$

1. feladat: A helyiségben az x, y és z irányok mentén az n_x=1, n_y=0, n_z=0 módushoz tartozó hullámszámok,

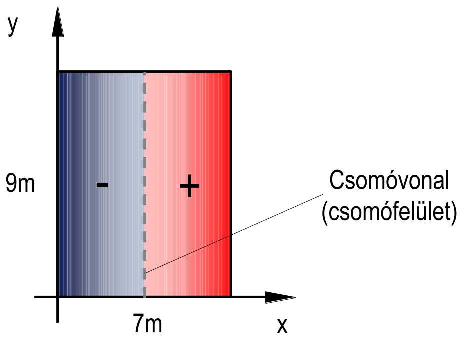
$$k_{n_x=1}=\frac{2\pi n_x}{2l_x}=\frac{2\cdot\pi\cdot 1}{2\cdot 7}\approx 0{,}449\,rad/m$$

$$k_{n_y=0}=\frac{2\pi n_y}{2l_y}=\frac{2\cdot\pi\cdot 0}{2\cdot 9}=0\,rad/m$$

$$k_{n_z=0}=\frac{2\pi n_z}{2l_z}=\frac{2\cdot\pi\cdot 0}{2\cdot 4}=0\,rad/m$$

Az $\omega_{1,0,0}$ akusztikai sajátfrekvencia,

$$\omega_{1,0,0}=\sqrt{a^2\left(k_{n_x=1}^2+k_{n_y=0}^2+k_{n_z=0}^2\right)}=\sqrt{343{,}1^2(0{,}449^2+0+0)}\approx 154\,rad/sec\quad(24{,}5Hz)$$



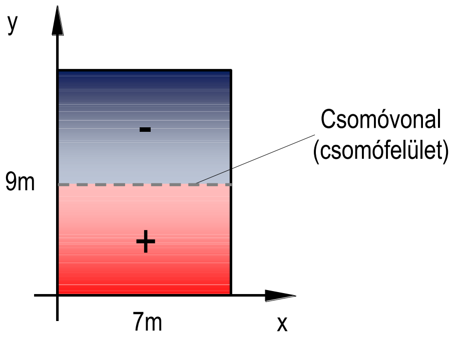
A helyiségben az n_x=1, n_y=0, n_z=0 módus esetén kialakuló hangnyomás megoszlás t=áll. pillanatban, az egyensúlyi értékhez képest a kék szín a kisebb, a piros a nagyobb nyomásokat jelöli, a mélyülő árnyalat a növekvő abszolútértéket jelöli

2. feladat: A helyiségben az x, y és z irányok mentén az n_x=0, n_y=1, n_z=0 módushoz tartozó hullámszámok,

$$k_{n_x=0} = \frac{2\pi n_x}{2l_x} = \frac{2\cdot\pi\cdot 0}{2\cdot 7} = 0\,rad/m$$
$$k_{n_y=1} = \frac{2\pi n_y}{2l_y} = \frac{2\cdot\pi\cdot 1}{2\cdot 9} \approx 0{,}349\,rad/m$$
$$k_{n_z=0} = \frac{2\pi n_z}{2l_z} = \frac{2\cdot\pi\cdot 0}{2\cdot 4} = 0\,rad/m$$

Az $\omega_{0,1,0}$ akusztikai sajátfrekvencia,

$$\omega_{0,1,0} = \sqrt{a^2\left(k^2_{n_x=0} + k^2_{n_y=1} + k^2_{n_z=0}\right)} = \sqrt{343{,}1^2(0 + 0{,}349^2 + 0)} \approx 120\,rad/\sec \quad (19{,}1 Hz)$$



A helyiségben az n_x=0, n_y=1, n_z=0 módus esetén kialakuló hangnyomás megoszlás t=áll. pillanatban, az egyensúlyi értékhez képest a kék szín a kisebb, a piros a nagyobb nyomásokat jelöli, a mélyülő árnyalat a növekvő abszolútértéket jelöli

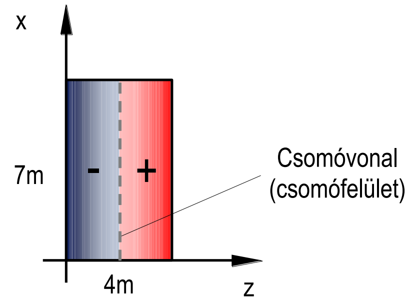
3. feladat: A helyiségben az x, y és z irányok mentén az n_x=0, n_y=0, n_z=1 módushoz tartozó hullámszámok,

$$k_{n_x=0} = \frac{2\pi n_x}{2l_x} = \frac{2\cdot\pi\cdot 0}{2\cdot 7} = 0\,rad/m$$
$$k_{n_y=0} = \frac{2\pi n_y}{2l_y} = \frac{2\cdot\pi\cdot 0}{2\cdot 9} = 0\,rad/m$$

$$k_{n_z=1} = \frac{2\pi n_z}{2l_z} = \frac{2\cdot\pi\cdot 1}{2\cdot 4} \approx 0{,}785\, rad/m$$

Az $\omega_{0,0,1}$ akusztikai sajátfrekvencia,

$$\omega_{0,0,1} = \sqrt{a^2\left(k_{n_x=0}^2 + k_{n_y=0}^2 + k_{n_z=1}^2\right)} = \sqrt{343{,}1^2(0+0+0{,}785^2)} \approx 270\, rad/\sec \quad (42{,}9Hz)$$



A helyiségben az n_x=0, n_y=0, n_z=1 módus esetén kialakuló hangnyomás megoszlás t=áll. pillanatban, az egyensúlyi értékhez képest a kék szín a kisebb, a piros a nagyobb nyomásokat jelöli, a mélyülő árnyalat a növekvő abszolútértéket jelöli

4. feladat: A helyiségben az x, y és z irányok mentén az n_x=1, n_y=1, n_z=0 módushoz tartozó hullámszámok,

$$k_{n_x=1} = \frac{2\pi n_x}{2l_x} = \frac{2\cdot\pi\cdot 1}{2\cdot 7} \approx 0{,}449\, rad/m$$

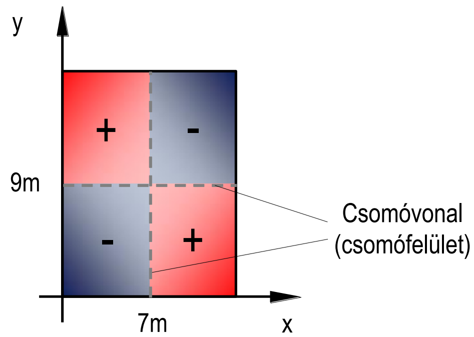
$$k_{n_y=1} = \frac{2\pi n_y}{2l_y} = \frac{2\cdot\pi\cdot 1}{2\cdot 9} \approx 0{,}349\, rad/m$$

$$k_{n_z=0} = \frac{2\pi n_z}{2l_z} = \frac{2\cdot\pi\cdot 0}{2\cdot 4} = 0\, rad/m$$

Az $\omega_{1,1,0}$ akusztikai sajátfrekvencia,

$$\omega_{1,1,0} = \sqrt{a^2\left(k_{n_x=1}^2 + k_{n_y=1}^2 + k_{n_z=0}^2\right)} = \sqrt{343{,}1^2(0{,}449^2+0{,}349^2+0)} \approx$$

$$\approx 195\, rad/\sec \quad (31{,}1Hz)$$



A helyiségben az n_x=1, n_y=1, n_z=0 módus esetén kialakuló hangnyomás megoszlás t=áll. pillanatban, az egyensúlyi értékhez képest a kék szín a kisebb, a piros a nagyobb nyomásokat jelöli, a mélyülő árnyalat a növekvő abszolútértéket jelöli

5. feladat: A helyiségben az x, y és z irányok mentén az n_x=1, n_y=1, n_z=1 módushoz tartozó hullámszámok,

$$k_{n_x=1}=\frac{2\pi n_x}{2l_x}=\frac{2\cdot\pi\cdot 1}{2\cdot 7}\approx 0{,}449\,rad/m$$

$$k_{n_y=1}=\frac{2\pi n_y}{2l_y}=\frac{2\cdot\pi\cdot 1}{2\cdot 9}\approx 0{,}349\,rad/m$$

$$k_{n_z=1}=\frac{2\pi n_z}{2l_z}=\frac{2\cdot\pi\cdot 1}{2\cdot 4}\approx 0{,}785\,rad/m$$

Az $\omega_{1,1,1}$ akusztikai sajátfrekvencia,

$$\omega_{1,1,1}=\sqrt{a^2\left(k^2_{n_x=1}+k^2_{n_y=1}+k^2_{n_z=1}\right)}=\sqrt{343{,}1^2(0{,}449^2+0{,}349^2+0{,}785^2)}\approx$$

$$\approx 333\,rad/\sec \quad (52{,}9Hz)$$

6. feladat: A helyiségben az x, y és z irányok mentén az n_x=15, n_y=10, n_z=7 módushoz tartozó hullámszámok,

$$k_{n_x=15}=\frac{2\pi n_x}{2l_x}=\frac{2\cdot\pi\cdot 15}{2\cdot 7}\approx 6{,}73\,rad/m$$

$$k_{n_y=10}=\frac{2\pi n_y}{2l_y}=\frac{2\cdot\pi\cdot 10}{2\cdot 9}\approx 3{,}49\,rad/m$$

$$k_{n_z=7}=\frac{2\pi n_z}{2l_z}=\frac{2\cdot\pi\cdot 7}{2\cdot 4}\approx 5{,}5\,rad/m$$

Az $\omega_{15,10,7}$ akusztikai sajátfrekvencia,

$$\omega_{15,10,7}=\sqrt{a^2\left(k^2_{n_x=15}+k^2_{n_y=10}+k^2_{n_z=7}\right)}=\sqrt{343{,}1^2(6{,}73^2+3{,}49^2+5{,}5^2)}\approx$$

$$\approx 3213\,rad/\sec \quad (511{,}4Hz)$$

7. feladat: A helyiségben az x, y és z irányok mentén az n_x=16, n_y=10, n_z=7 módushoz tartozó hullámszámok,

$$k_{n_x=16}=\frac{2\pi n_x}{2l_x}=\frac{2\cdot\pi\cdot 16}{2\cdot 7}\approx 7{,}18\,rad/m$$

$$k_{n_y=10}=\frac{2\pi n_y}{2l_y}=\frac{2\cdot\pi\cdot 10}{2\cdot 9}\approx 3{,}49\,rad/m$$

$$k_{n_z=7}=\frac{2\pi n_z}{2l_z}=\frac{2\cdot\pi\cdot 7}{2\cdot 4}\approx 5{,}5\,rad/m$$

Az $\omega_{16,10,7}$ akusztikai sajátfrekvencia,

$$\omega_{16,10,7}=\sqrt{a^2\left(k^2_{n_x=16}+k^2_{n_y=10}+k^2_{n_z=7}\right)}=\sqrt{343{,}1^2(7{,}18^2+3{,}49^2+5{,}5^2)}\approx$$

$$\approx 3326\,rad/\sec \quad (529{,}4Hz)$$

Megjegyzések:

- Noha a megoldás során masszívan felhasználtuk, azért a 3 dimenziós esetben is fontos megemlíteni, hogy a hullámegyenlet általános és határolt téri megoldása között a legfontosabb különbség, hogy a hullámot leíró függvények argumentumában a hely- és időváltozó az általános megoldásban együtt, a határolt téri megoldásban külön-külön szétválasztva (szeparálva) szerepelnek. A független változók együttes megjelenése az argumentumban ($t \pm \underline{r} \cdot \underline{n}/a$) a hullám haladó jellegére utal. A határolt téri megoldásban az $\underline{r}$ és t változók szeparálódása a hullám haladó jellegének megszűnését jelzi. Alkalmas gerjesztés esetén a falakkal határolt térben haladó hullám helyett a folytonos, rugalmas közeg lengése alakul ki, amelyet a 3 dimenziós jellegnek megfelelően csomófelületek és duzzadófelületek periodikus rendszere jellemez.

- A β_{nx}, β_{ny}, β_{nz} illetve B_{nx} (Fourier) együtthatók a hangnyomás (p') kezdő pillanatban (t= 0) érvényes eloszlásából, a kezdetiérték feltételből határozhatók meg.

- Matematikai megközelítésben a k_{nx}, k_{ny} és k_{nz} állandók a feladat sajátértékei, amelyek a megoldás függvényben az x, y és z változók együtthatói, és segítségükkel a hullámegyenlet mellett a peremfeltételek is kielégíthetők. A k_{nx}, k_{ny} és k_{nz} állandókat a helyiség mérete alapján lehet meghatározni.

- Fizikai, akusztikai megközelítésben a k_{nx}, k_{ny} és k_{nz} állandók olyan alkalmasan megválasztott hullámszámok, amelyek révén a határolófalak között ide-oda verődő hanghullámok, a megfelelő hullámhosszuk miatt építő jellegű interferenciát hoznak létre. Például legyen az n_x=1, a többi n érték nulla, így az x tengely menti alapharmonikus lengés alakul ki. Ekkor a $\lambda_{x1}=2l_x$, így x irányban a falak távolsága éppen fél hullámhossz, az egyik faltól induló hullám a másikon visszaverődve az eredeti oldalra éppen egy hullámhossz megtétele után, azonos fázisban ér vissza, és a hullámok összetétele során erősítés alakul ki. Hasonlóan, ha az n_x=2, és a többi n érték nulla esetén a $\lambda_{x2}=l_x$, x irányban a falak távolsága éppen egy hullámhossz, így a visszavert hullám éppen két hullámhossz megtétele után, de továbbra is azonos fázisban, erősítést okozva ér vissza, és így tovább többi összetevőre.

- Matematikai megközelítésben az $\omega_{nx,ny,nz}$ állandók a feladat sajátértékei, amelyek a megoldás függvényben az idő (t) változó együtthatói, és segítségükkel a hullámegyenlet mellett a peremfeltételek is kielégíthetők. Az $\omega_{nx,ny,nz}$ állandókat a helyiség mérete és a közegben érvényes hangsebesség alapján lehet meghatározni.

- Fizikai, akusztikai megközelítésben az $\omega_{nx,ny,nz}$ állandók olyan alkalmasan megválasztott szögfrekvenciák, amelyekkel a határolófalak között ide-oda verődő hanghullámok, a megfelelő hullámhosszuk miatt építő jellegű interferenciát hoznak létre (ld. előző magyarázat).

- Egy adott geometria és közeg esetén a k_{nx}, k_{ny} és k_{nz} illetve $\omega_{nx,ny,nz}$ sajátértékeket visszahelyettesítve a hullámegyenlet 3 dimenziós határolt téri megoldásába a sajátfüggvényeket kapjuk. A sajátfüggvények a hullámegyenletet és a csatlakozó peremfeltételeket egyaránt kielégítik, és a határolt térben kialakuló közeg sajátlengést írják le. Teremakusztikában a levegő sajátlengéseit teremhangoknak nevezzük.

- Hasonlóan az 1 dimenziós esethez, 3 dimenzióban is a sajátfüggvények csak a rendszerben lévő lehetőségek. Az, hogy a hangtérben mi lesz hallható, alapvetően a gerjesztéstől függ. Vastag falakkal határolt térben beszélő személytől távolabb, a hangtérben alapvetően a megszólaló személy hangja lesz hallható. Megfelelő helyen és sajátfrekvenciák valamelyikével végzett gerjesztés hatására azonban a rendszer sajátlengése létrehozható. Ha a gerjesztési frekvencia megegyezik a sajátfrekvenciák valamelyikével, rezonancia alakul ki.

- A rezonancia során kialakuló térben periodikusan erősödő és gyengülő hangtér egyenetlen térfogati hangenergiasűrűség megoszlást és torz hanghatást okoz. Hangterek vizsgálatánál a térben egyenetlen hangnyomásmegoszlás méréstechnikai szempontból is kedvezőtlen. A rezonanciára jellemző nagy amplitúdók a gépészeti berendezésekben (pl.: tartályok, csövek folyadék töltete vagy véges méretű fémszerkezetek) jelentős dinamikus többletterhelést okoznak. Így szándékaink szerint a rezonancia jelenségét a mérnöki (akusztikus, gépész, …) gyakorlatban inkább elkerüljük. Kivételt például az akusztikában a hangszerek képeznek, amelyek közül számos működési elvében és megszólalásában a rezonancia fontos szerepet játszik.

- Ha összegyűjtjük az előző számítási példában bemutatott sajátfrekvenciákat, és nagyság szerint rendezzük, ezek rendre,

19,1Hz   24,5Hz   31,1Hz   42,9Hz   52,9Hz   ….   511,4Hz   529,4Hz értékek. Megfigyelhető, hogy nagyon sok sajátfrekvencia alakul ki (csak néhányat számoltunk ki) és az egymással szomszédos frekvenciák közötti különbség párszor 10Hz nagyságú, vagyis nagy a modális sűrűség. Teljesen reális geometriai méretek esetén a sajátfrekvenciák a hallható frekvencia tartományt teljes egészében megtöltik.

- Az egymással szomszédos sajátfrekvenciák relatív különbsége (abszolút frekvencia különbség per alap frekvencia) a nagyobb módus szám irányában csökken. Ennek értéke az emberi frekvencia-különbségi hallásküszöb közelében van, tehát jószerével nagy frekvencia tartományban a szomszédos módusok közötti hangmagasság különbséget nem is érzékeljük.

- A számos frekvencia összetevő figyelemmel kísérése hullámakusztikai modellezéssel nehéz feladat. A helyzetet tovább bonyolítja a terem geometria és a határoló felületek akusztikai tulajdonságainak összetett jellege (jelen esetben az egyik legegyszerűbb esetet, téglatest alak, egynemű, merev falak). Ezért mérnöki teremakusztikai számításokhoz a hatékonyság (számítás pontossága és a számításhoz szükséges idő) növeléséhez más módszereket (pl.: energetikai akusztikai modell, sugárkövetés) is használunk.

3.2. Gyakorló feladat

Gy.1. A hullámegyenlet általános megoldásából kiindulva vezesse le és elemezze a 3D megoldást téglatest alakú, falakkal határolt térben! A levezetés minden lépését írja le, illetve az elhanyagolásokat indokolja! Adja meg a megoldás függvény fizikai tartalmának legfontosabb jellemzőit és gyakorlati jelentőségét!
