Alkalmazott áramlástan és akusztika

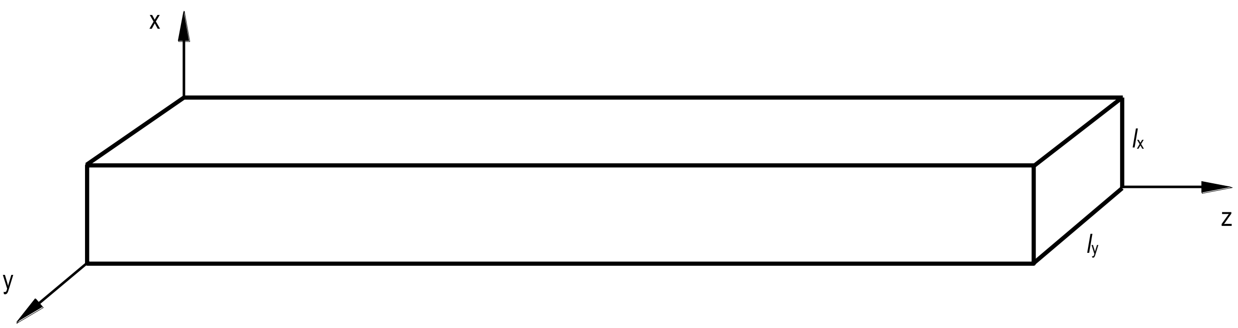
(önálló felkészülést segítő tananyag az akusztika részhez)

Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

4. előadás

Tartalom:

Korábbi előadásokon bemutattuk a hangterjedést szabad térben, majd megvizsgáltuk a kialakuló hangtér jellemzőit előbb 1D majd 3D határolt esetben. Felmerül a kérdés, mi történik, ha összetesszük a feltételeket és egy olyan hangteret vizsgálunk, amely egyik irányból szabadnak, a másik két irányból viszont határoltnak tekinthető. Mielőtt túl elméletinek bélyegeznénk a felvetést, belátható, hogy a hosszú csővezetékek pont ilyenek. Légtechnikában, vízellátásban számtalanszor találunk olyan esetet, amikor a cső hossza jóval nagyobb, mint a keresztmetszet jellemző mérete. Megérzésünk szerint a haladó hullámok és a határolt téri folytonos (kontinuum) közeglengések együttes jelenléte nem kizárt. Az áramlástechnikai gyakorlatban fontos jelenség megismerése érdekében vizsgáljuk meg a kialakuló hangteret egy téglalap keresztmetszetű, légnemű közeggel kitöltött végtelen hosszú csatorna (pl.: légcsatorna vezeték épületgépészteben) esetében.



Hangtér az l_x és l_y méretű, téglatest keresztmetszetű légcsatornában

4.1. Magasabb rendű hangterjedési módusok

Célunk a hangtér számítása két irány mentén véges távolságban (l_x és l_y) falakkal határolt, harmadik irányban végtelen hosszúnak tekinthető térben (csövekben, csatornákban), a csatorna hullámfüggvény meghatározása. Estetünkben az áramlástan alapegyenletei és a lineáris akusztikában alkalmazott egyszerűsítő feltételek továbbra is érvényesek. A levezetés kiindulása a homogén akusztikai hullámegyenlet, a térbeli jelleg miatt az egyszerűség érdekében, a hangnyomás változóra,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0$$

A csatorna alapvetően határolt térnek tekinthető, ezért a levezetés első lépései a 3D határolt terekkel megegyező. Kiinduló feltételezésünk szerint a megoldást a változók szerint szétválasztott függvényösszetevők szorzataként keressük,

$$p'(\underline{r}, t) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) \cdot e^{i(\omega t)} =$$

A „próba" megoldás függvényt helyettesítsük vissza a hullámegyenletbe,

$$\frac{f''}{f}+\frac{g''}{g}+\frac{h''}{h}=-\frac{\omega^2}{a^2}$$

A differenciálegyenlet biztosan teljesül, ha a bal oldalon az egyes tagok külön-külön is egy-egy negatív állandóval egyenlők,

$$\frac{f''}{f}=-K_1 \qquad \frac{g''}{g}=-K_2 \qquad \frac{h''}{h}=-K_3$$

A 3D határolt téri hullámegyenlet megoldásánál nyert tapasztalatok alapján a megoldást célszerű a szinusz és koszinusz függvények között keresni. Első lépésben vegyük az f függvény megoldását általános esetben,

$$f(x)=\alpha_{n_x} sin k_{n_x} x+\beta_{n_x} cos k_{n_x} x$$

Az x tengely mentén az x= 0 m helyen az áramlástan tapadás törvénye értelmében az áramlási sebesség tartósan nulla, így ugyanezen a helyen a lokális gyorsulás és a mozgásegyenlet alapján a nyomás x szerinti deriváltja is nulla,

$v'_x(0, t)$= 0 m/s $\qquad \frac{\partial v'_x(0,t)}{\partial t}=0\ m/s^2 \qquad$ és $\qquad \frac{\partial p'(0,t)}{\partial x}=0\ Pa/m$

Így,

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_{x=0m}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0m}=\alpha_{n_x} k_{n_x} cos k_{n_x} 0-\beta_{n_x} k_{n_x} sin k_{n_x} 0=0\,\frac{Pa}{m}$$

A második egyenlőség jel után a szinuszos tag nulla, így különbség csak úgy lehet nulla, ha a koszinuszos tag is nulla, azonban koszinusz nulla értéke egy, így a koszinuszos tag csak úgy lehet nulla, ha

$$\alpha_{n_x}=0$$

A hasonló peremfeltételek alapján, ugyanezt az eredményt kapunk az x= l_x m helyen is, így az „f" függvény,

$$f(x)=\beta_{n_x} cos k_{n_x} x$$

A g(x) függvény esetében, az y tengely mentén az y= 0 m és y= l_y m helyeken a peremfeltételek figyelembe vételével, hasonló meggondolás alapján,

$$g(y)=\beta_{n_y} cos k_{n_y} y$$

A határolófelületek lezárása és így a peremfeltételek hiányában z irányban az előzőhöz hasonló megoldás nem származtatható. A h függvény összetevő meghatározásához helyettesítsük vissza az f és g összetevőket az alábbiak szerint,

$$\frac{f''}{f}+\frac{g''}{g}+\frac{h''}{h}=\frac{-\beta_{n_x} k_{n_x}^2 cos k_{n_x} x}{\beta_{n_x} cos k_{n_x} x}+\frac{-\beta_{n_y} k_{n_y}^2 cos k_{n_y} y}{\beta_{n_y} cos k_{n_y} y}+\frac{h''}{h}=\frac{h''}{h}-k_{n_x}^2-k_{n_x}^2=-\frac{\omega^2}{a^2}$$

Amelyből,

$$h'' + \left(\frac{\omega^2}{a^2} - k_{n_x}^2 - k_{n_x}^2\right)h = 0$$

A differenciálegyenlet megoldása,

$$h(z) = \alpha_{n_x n_y} e^{-ik_{n_x n_y} z} + \beta_{n_x n_y} e^{ik_{n_x n_y} z}$$

Ahol, z (csőtengely) irányú hangterjedésre vonatkozó hullámszám,

$$k_{n_x n_y} = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k_{n_x}^2 - k_{n_x}^2}$$

Végül az f, g és h függvény összetevők behelyettesítése után a teljes megoldás,

$$p'(\underline{r}, t) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) \cdot e^{i(\omega t)} =$$

$$\beta_{n_x} cosk_{n_x} x \cdot \beta_{n_y} cosk_{n_y} y \cdot \left(\alpha_{n_x n_y} e^{-ik_{n_x n_y} z} + \beta_{n_x n_y} e^{ik_{n_x n_y} z}\right) \cdot e^{i(\omega t)} =$$

$$\beta_{n_x} cosk_{n_x} x \cdot \beta_{n_y} cosk_{n_y} y \cdot \left(\alpha_{n_x n_y} e^{i\left(\omega t - k_{n_x n_y} z\right)} + \beta_{n_x n_y} e^{i\left(\omega t + k_{n_x n_y} z\right)}\right)$$

Megjegyzések:

- β_{n_x} , β_{n_y} , $\alpha_{n_x n_y}$ és $\beta_{n_x n_y}$ a kezdeti feltételtől (indító gerjesztéstől) függő állandók.

- Szűk matematikai megközelítésben, a csatornákban kialakuló hangterjedésre vonatkozó általános megoldás az x és y irányokban a hely (x, y) és idő (t) változókat szétválasztva tartalmazó (kontinuum lengés), illetve z irányban a hely (z) és idő (t) változókat közös argumentumban tartalmazó (haladó hullám) függvény összetevők szorzata.

- Fizikai értelemben, általános esetben a csatornában kialakuló hangtér egy z irányban terjedő haladó hullám és a falakra merőleges, x és y irányú, két folytonos közeglengés eredője. (Felhívjuk a figyelmet, hogy a változók szerint szeparált „próba függvénnyel" a csatornában kialakuló hangteret a határolt téri közeglengés irányába tereltük. A peremfeltételek következetes alkalmazása azonban visszavezette a megoldást a fizikailag helyes irányba, és lezárás nélküli, végtelen hosszú csőben, z irányban a megoldás szabadon terjedő síkhullám formájában adódott.)

- A szögfrekvencia és a z irányú hullámszám hányadosa a z irányú fázissebesség,

$$a_{fz} = \frac{\omega}{k_{n_x n_y}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k_{n_x}^2 - k_{n_x}^2}}$$

z irányban az a_{fz} zavarásterjedési sebesség (fázissebesség) a szögfrekvencia (ω), a hangsebesség (a), a csatorna keresztmetszet méretek (l_x, l_y) és a felharmonikus sorszám (n_x, n_y) értékek függvénye. A zavarás terjedési sebesség a frekvencia függvénye, azaz magasabb módus hangterjedés esetén színszóródás alakul ki.

- Az n_x=0 és n_y=0 esetben $k_{n_x} = 0\,rad/m$ és $k_{n_y} = 0\,rad/m$, így a_{fz}=a és

$$p'(\underline{r}, t) = \beta_{n_x} cos0 \cdot x \cdot \beta_{n_y} cos0 \cdot y \cdot \left(\alpha_{n_x n_y} e^{i(\omega t - kz)} + \beta_{n_x n_y} e^{i(\omega t + kz)}\right) =$$

$$Ae^{i(\omega t - kz)} + Be^{i(\omega t + kz)}$$

a csatornában a csatornatengellyel párhozamos (z) irányú síkhullám hangterjedés alakul ki.

- Vizsgáljuk meg a z (csőtengely) irányú hangterjedésre vonatkozó hullámszám kifejezését,

$$k_{n_x n_y} = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - k_{n_x}^2 - k_{n_x}^2}$$

Amennyiben

$$\omega < \sqrt{a^2\left(k_{n_x}^2 + k_{n_x}^2\right)}$$

a z irányú hullámszám kifejezésében a gyök alatti mennyiség negatív, így a $k_{n_x n_y}$ képzetes, a változók a z irány mentén is szeparálódnak, a haladó jelleg megszűnik. Bizonyos határfrekvencia (vágási frekvencia, $f_{cut\ off}$) alatt magasabb hangterjedési módus nem alakulhat ki.

Ha

$$\omega = \sqrt{a^2\left(k_{n_x}^2 + k_{n_x}^2\right)}$$

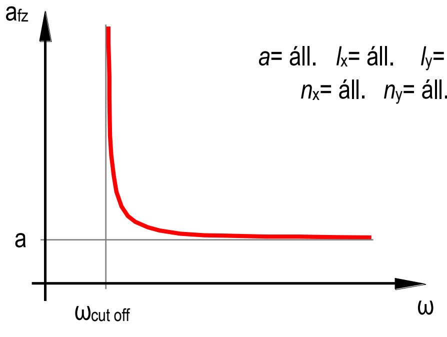
$$a_{fz} \to \infty$$

Fizikai értelemben a közeg a határoló csatorna falakkal párhuzamosan leng, a z tengely mentén a falakkal párhuzamos síkokban a részecskék azonos fázisban és azonos amplitúdóval lengenek, ezeken a felületeken a csőhossz mentén tetszőleges távolságban lévő pontokban a zavarás (fázis állapot) időkésés nélkül jelenik meg, így a z irányú fázissebesség tart végtelenhez.

Amennyiben

$$\omega > \sqrt{a^2\left(k_{n_x}^2 + k_{n_x}^2\right)}$$

a z irányú hullámszám kifejezésében a gyök alatti mennyiség pozitív, így $k_{n_x n_y}$ valós, a változók a z irány mentén nem szeparálódnak, a haladó jelleg nem szűnik meg, de a hangtér nem síkhullám, hanem haladó hullám és kontinuum lengés összetétele.



A csatornatengellyel párhuzamos z irányú fázissebesség (a_{fz}) változása a szögfrekvencia (ω) függvényében adott csatornakeresztmetszet és közeg, illetve n_x =áll. és n_y = áll. keresztirányú módus szám esetén

- Csatornákban a vágási frekvencia alatt csak síkhullám hangterjedés alakul ki. Méréstechnikai szempontból ez avval az előnnyel jár, hogy a hangtér meghatározásához a csatornában elvileg elég egy mérési pontot felvenni. Ennek ellenére a gyakorlatban ilyen esetben is több pontban mérünk.

A magasabb módusok ismeretének másik elvi alkalmazási lehetősége az aktív zajcsökkentés. Vágási frekvencia alatt hangterjedés csak csőtengellyel párhuzamosan terjedő síkhullám formában jön létre. Geometriai szempontból az egyszerű hullámforma ellentettje, az „ellen-hang” könnyen előállítható. Ennek ellenére a szükséges nagy térfogati zavarások és a sok esetben nehéz üzemi körülmények (pl.: gépjármű füstgáz csatornarendszer, nagy hőmérséklet, kondenzvíz jelenléte, …) miatt csatorna hangtompításra az aktív zajcsökkentés a hétköznapi gyakorlatban nem terjedt el.

4.2. Gyakorló feladatok

Gy.1. Mik a magasabb hangterjedési módusok, vezesse le a csatorna hangterjedést leíró hullámfüggvényt általános esetre! Gyakorlati szempontból mi a jelentősége a magasabb rendű hangterjedési módusoknak?

Gy.2. Határozza meg egy 630mmx400mm keresztmetszetű, hosszú (többször 10m) csatornában a legkisebb vágási frekvencia értékét! A csatornában a levegő hőmérséklete 20˚C.

Megoldás:

$$a = \sqrt{\kappa R T_0} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot (273 + 20)} \approx 343 \ m/s$$

A legkisebb frekvencia, a legnagyobb hullámhosszból, a legnagyobb méretből adódik és a legkisebb felharmonikus sorszámnál (alap frekvencián) adódik,

$$\omega_{cut\ off\ min} = \sqrt{a^2\left(k_{n_x}^2 + k_{n_x}^2\right)} = \sqrt{a^2\left(\left(\frac{2\pi n_x}{2 l_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_y}{2 l_y}\right)^2\right)} \approx$$

$$\sqrt{343^2\left(\left(\frac{2\pi 1}{2 \cdot 0{,}63}\right)^2 + \left(\frac{2\pi 0}{2 \cdot 0{,}4}\right)^2\right)} \approx 1711\, rad/sec \approx 272 Hz$$
