<u>**Alkalmazott áramlástan és akusztika**</u>

(önálló felkészülést segítő tananyag az akusztika részhez)

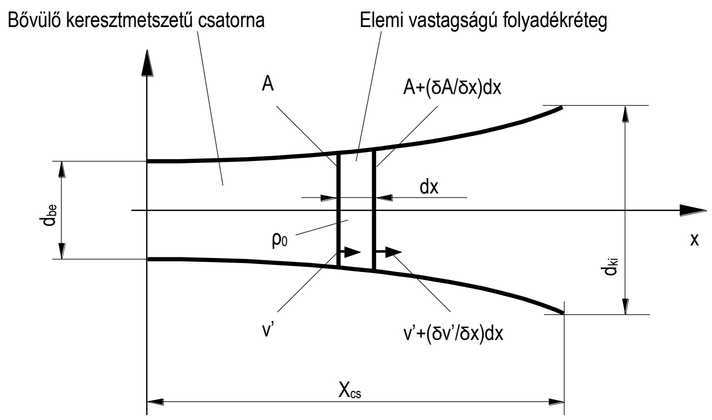
Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

8. előadás

Tartalom:

8.1. Hangterjedés folyamatosan változó keresztmetszetű csatornában

A korábbi előadásokon a hangterjedést különböző hirtelen keresztmetszet változásokon keresztül vizsgáltuk (véges keresztmetszet változás, expanzós dob, hirtelen csővégződés). Csatornában a keresztmetszetek véges hosszú folytonos átmenettel is megváltozhatnak (konfúzor, diffúzor), ilyenekre gyakorlati alkalmazásokat a gépészeti zajvédelemben, hangszer akusztikában bőven találunk. A levezetés célja a folyamatosan változó keresztmetszetű csatornában kialakuló hangterjedés matematikai modellezése. A csatornában kialakuló hangterjedés leírásához az áramlástan alapegyenletei és a lineáris akusztikában alkalmazott egyszerűsítő feltételek érvényesek. További egyszerűsítés, hogy hangterjedés a csatorna tengellyel párhuzamos irányban haladó síkhullámok formájában alakul ki, a csatornakeresztmetszet jellemző méretéhez (pl.: átmérő (d)) képest a hullámhossz (λ) jóval nagyobb (λ>>d). A csatorna keresztmetszete a hossz mentén lassan változik, a bővülés esetén a kilépő átmérő (d_{ki}) és a belépő átmérő (d_{be}) különbségéhez képest a csatorna hossza (X_{cs}) jóval nagyobb (d_{ki}-d_{be}<<X_{cs}).



Hangterjedés folyamatosan változó keresztmetszetű csatornában, geometriai és áramlási jellemzők az elemi vastagságú folyadékréteg két oldalán

A tömegmegmaradás elvét kifejező kontinuitás egyenlet a csatorna egy elemi hosszúságú szeletére,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = q_{mbe} - q_{mki}$$

Az egyenlet jobb oldalán, a tömegáramok számításánál a sűrűség időben ingadozó összetevőjének elhanyagolásával $\rho_0 \approx \rho_0 + \rho'$(lineáris akusztikában szokásos egyszerűsítés),

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} A dx = A v' \rho_0 - \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx\right)\left(v' + \frac{\partial v'}{\partial x} dx\right)\rho_0$$

A zárójeles tagok szorzását, a másodrendben kis tag elhanyagolását és a hely szerinti szorzat derivált összevonását követően,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} A = -\rho_0 v' \frac{\partial A}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} A = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} (v' A)$$

Az impulzus mérleget kifejező mozgásegyenlet lineáris akusztikában alkalmazott differenciálegyenlet alakja,

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

Deriváljuk a kontinuitás egyenlet mindkét oldalát az idő szerint

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} A = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial v'}{\partial t} \right)$$

Helyettesítsük be az egyenlet jobb oldalán, a zárójeles tagban a részecskesebesség időszerinti derivált helyére a mozgásegyenlet jobb oldalát,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} A = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial p'}{\partial x} \right)$$

A hangsebesség (a) négyzet a hangnyomás (p’) és a sűrűségingadozás (ρ’) változókkal,

$$a^2 = \frac{p'}{\rho'}$$

A hangsebesség négyzet összefüggéséből fejezzük ki a sűrűségingadozás értékét és helyettesítsük be a kontinuitás egyenlet idő szerinti derivált bal oldalába,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{p'}{a^2} \right) A = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial p'}{\partial x} \right)$$

A hangsebesség időben állandó, így kiemelhető az idő szerinti kétszer deriválás elé,

$$\frac{A}{a^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial p'}{\partial x} \right)$$

Az így nyert másodrendű, homogén, parciális differenciálegyenlet, a levezetés végeredménye, a változó keresztmetszetű csatornában kialakuló hangterjedés leírására szolgáló alapegyenlet. Konkrét esetben, a keresztmetszet hely függésének ismeretében, az A függvényt behelyettesítjük az egyenletbe és a megoldás a csatornában kialakuló hangterjedést leíró hullámfüggvény. Ha a csőkeresztmetszet a hely függvényében állandó (A=áll.), a hang állandó keresztmetszetű csatornában terjed, A kiemelhető a hely szerinti deriválás elé, és az összefüggés a homogén hullámegyenletté alakul.

Bizonyos keresztmetszet változás helyfüggés esetén az egyenlet megoldása zárt alakban is meghatározható. Így például exponenciális függvénykapcsolat esetén,

$$A(x) = A_0\, e^{\alpha x}$$

Behelyettesítés után,

$$\frac{A_0\, e^{\alpha x}}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_0\, e^{\alpha x}\frac{\partial p'}{\partial x}\right) = A_0\alpha\, e^{\alpha x}\frac{\partial p'}{\partial x} + A_0\, e^{\alpha x}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$

Az egyenlet megoldása,

$$p'(x,t) = e^{-\frac{\alpha x}{2}}\left(Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}\right)$$

ahol a hullámszám,

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4}}$$

Megjegyzések:

- Az exponenciális haladvány szerint változó keresztmetszetű csatornát az akusztikában exponenciális tölcsérnek nevezzük.

- $\omega > \frac{\propto a}{2}$ estén $\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4} > 0$, a hullámszám (k) tisztán valós, a hullámfüggvényben az exponenciális kifejezések argumentumában a hely és idő változók együtt találhatók meg, a változó keresztmetszetű csatornában haladó hullámterjedés alakul ki.

- A plusz x és mínusz x irányban haladó hullámok A és B amplitúdói a zárójel előtt, az exponenciális kifejezés révén a hely függvényében változnak. Ha α pozitív, a csatorna hossza mentén a keresztmetszet nő, az amplitúdó csökken. Ha α negatív, a csatorna hossza mentén a keresztmetszet csökken, az amplitúdó nő. Az amplitúdó változása a keresztmetszet gyökével fordítottan arányos (ld.: az αa/2 kifejezés nevezőjében a 2).

- Veszteségek és fali elnyelés hiányában a csatornában terjedő hangteljesítmény állandó, a csatorna keresztmetszet és az intenzitás között fordított arányos kapcsolat érvényes. A pillanatnyi hangintenzitás a hangnyomás négyzetével arányos, így állandó csatornában haladó hangteljesítmény esetén a hangnyomás amplitúdó a keresztmetszet négyzetgyökével lesz fordítottan arányos.

- $\omega = \frac{\propto a}{2}$ estén $\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4} = 0$, a hullámszám (k) nulla, az exponenciális kifejezések argumentumában a hely változó eltűnik, csak az idő változó marad, a változó keresztmetszetű csatornában haladó hullámterjedés megszűnik, a csatornát kitöltő közeg teljes egésze azonos fázisban, a keresztmetszettől függő amplitúdóval leng.

- $\omega < \frac{\propto a}{2}$ estén $\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{4} < 0$, a hullámszám (k) tisztán képzetes, az exponenciális kifejezések argumentumában a hely és idő változók különválnak, a változó keresztmetszetű csatornában haladó hullámterjedés nem alakul ki.

- Az exponenciális tölcsérben a vágási frekvencia (f_{cutoff}) alatt hangterjedés nem alakul ki. A vágási frekvencia a keresztmetszet bővülési tényező (α) és a hangsebesség (a) függvénye.

- A gyakorlati megfigyelésekkel összhangban, csatornákban exponenciálistól eltérő, tetszőleges keresztmetszet változás esetén is kialakul hangterjedés. Feltételezhetően ezeknél is módosul a hangterjedés, de matematikai leírásuk általában bonyolultabb.

- A levezetett hangterjedési modell az exponenciális tölcsér belső részén igaz. Valóságos körülmények között az exponenciális tölcsér véges hosszú, a csatornaszakasz elején és végén az ott érvénye körülményekre, pl. véges keresztmetszet változásra vonatkozó összefüggések érvényesek.

- Kifejezetten az akusztikában folytonos csőátmenetet a hang lesugárzás javítása vagy visszaverődésmentes csőlezárás érdekében alkalmazunk.

- Kisméretű testek általában rossz hangsugárzók. Fizikai szemléletünk is azt sugallja, hogy a távoltér nagy légtömegeit a kisméretű sugárzó felülettel szomszédos, könnyen összenyomható és kitágítható levegőrétegen keresztül csak korlátozottan lehet megmozgatni. Hasonlóan, mintha nagy tömegű ingát oldalról lágy gumiszalaggal szeretnénk mozgásba hozni. A kis sugárzó felület egy exponenciális tölcséren keresztül reflexiómentesen megnövelhető. A megnövelt kilépő keresztmetszet hatékonyabb távoltéri besugárzást tesz lehetővé. Ezt az elvet használja ki például a nyomókamrás tölcséres hangsugárzó vagy a rézfúvós hangszerek.

- Gépészeti zajvédelemben számos esetben csőben kell hangmérést végezni. Ha a mérési feladat a csőhöz csatlakozó hangforrás (pl.: ventilátor) vizsgálata, a csővégről visszaverődő hang a mérési pontban ismét megjelenik és a mérési pontosságot leronthatja. Ha a cső mindkét vége hang visszaverő, a csőben elhelyezett hangforrás hatására közeg lengés alakulhat ki, amely a forrás közvetlen vizsgálatára alkalmatlan, jelentősen megváltozott akusztikai viszonyokat teremt. A csővégek reflexiómentes lezárása méréstechnikai szempontból fontos feladat. Kis csőátmérő esetén az exponenciális tölcsér reális megoldás, nagyobb csőátmérő esetén az exponenciális átmenet hossza és kilépő átmérője jelentősen megnövekszik, megvalósítása irreális erőforrás igényes, ritkán kerül rá sor. Nagyobb csőátmérők esetén a reflexiómentes csőlezárás a cső végénél, a cső hossza mentén, a cső palás fokozatosan növekvő kivágásával valósítható meg (Shenoda-féle reflexiómentes csőlezárás).

8.2. Gyakorló feladatok

Gy.1. Vezesse le a folytonosan változó keresztmetszetű csatornában kialakuló hangterjedés differenciálegyenletét!

Gy.2. Mutasson gyakorlati alkalmazási példát exponenciális tölcsérre!

Gy.3. Határozza meg egy 20mm belépő, 200mm kilépő átmérőjű 400mm hosszú exponenciális tölcsér vágási frekvenciáját! A levegőben a hangsebesség 340m/s.

Megoldás:

$$A(x) = A_0\, e^{\alpha x}$$

$$\frac{A(x)}{A_0} = e^{\alpha x}$$

$$\frac{\frac{0{,}2^2\pi}{4}}{\frac{0{,}02^2\pi}{4}} = e^{\alpha 0{,}4}$$

$$ln(100) = 0{,}4\alpha \qquad \alpha \approx 11{,}51\ 1/\text{m}$$

$$\omega_{cutoff} = \frac{\propto a}{2} \approx \frac{11{,}51 \cdot 340}{2} \approx 1975{,}2\ \frac{rad}{sec}$$

$$f_{cutoff} \approx 1957{,}2/2\pi \approx 311{,}5\ \text{Hz}$$
