Alkalmazott áramlástan és akusztika

(önálló felkészülést segítő tananyag az akusztika részhez)

Összeállította: Dr. Koscsó Gábor c. egyetemi docens (BME Áramlástan Tanszék)

9. előadás

Tartalom:

9.1. Gömbhullám hangterjedés

Síkhullám hangterjedéssel korábbi tanulmányaink során részletesen foglalkoztunk. Távol a hangforrásoktól, a hullámtér szűk környezetében a hullámfront felület közelítőleg sík, ilyen esetben a síkhullámokra vonatkozó megfontolások elegendően pontosak. Azonban lesznek esetek, amikor nem lehet a hangforrástól kellő mértékben eltávolodni, és a hangtér számítását a hangforrás közelében, görbült hullámfelületek esetén kell elvégezni. Első közelítésben vegyünk egy pontszerű, minden irányban egyenletesen sugárzó hangforrást, amely gömbszimmetrikus hangteret hoz létre. A gyakorlatban a síkhullám közelítés mellett a gömbhullám számos esetben jól elfogadható egyszerűsítés, és a matematikai leírása megoldható feladat. Célunk a gömbszimmetrikus hangtér jellemzőinek leírása a hullámtér középpontjától tetszőleges távolságban. A pontforrás közelében kialakuló gömbhullám hangterjedés leírásához az áramlástan alapegyenletei és a lineáris akusztikában alkalmazott egyszerűsítő feltételek érvényesek. A könnyen értelmezhető peremfeltételek miatt a levezetéshez használjuk a részecskesebesség változót. Pontforrás súrlódásmentes hangterében a részecskesebesség forgásmentes, így levezetések során a kényelmetlen vektor változó helyett a térbeli hullámmozgás leírásához vezessük be a részecskesebesség (v') skalárpotenciál függvényét (Φ).

$$\underline{v}' = grad\Phi'$$

Hangterekben a részecskesebesség megoszlás számos esetben örvénymentes, a skalárpotenciál függvény alkalmazása ezeknél is hasznos lehet. A skalárpotenciál függvény és a hangnyomás közötti kapcsolatot a lineáris akusztikai mozgásegyenlet segítségével határozhatjuk meg,

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} grad\, p'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(grad\Phi') = -\frac{1}{\rho_0} grad\, p'$$

A bal oldalon a deriválás sorrendjének felcserélését követően, illetve vegyük figyelembe, hogy a homogén közegben az egyensúlyi sűrűség (ρ_0) a hely függvényében állandó,

$$grad\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = grad\ \frac{-p'}{\rho_0}$$

$$p' = -\rho_0\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + K(t)$$

K(t) tetszőleges időtől függő konstans, értéke esetünkben legyen nulla. A hullámegyenlet a hangnyomás változóra tetszőleges térbeli hangterjedés esetén,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0$$

Helyettesítsük be a hangnyomás változó helyére annak részecskesebesség skalárpotenciál függvénnyel felírt kifejezését,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\rho_0\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right) - \Delta\left(-\rho_0\frac{\partial \Phi'}{\partial t}\right) = 0$$

Átalakításokat és a deriválás sorrendjének felcserélését követően,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \Phi') = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} - \Delta \Phi'\right) = 0$$

A bal oldalon a zárójelen belül a különbség értéke tetszőleges helytől függő állandó, értéke esetünkben legyen nulla. A homogén akusztikai hullámegyenlet a részecskesebesség skalárpotenciál függvényére,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} - \Delta \Phi' = 0$$

A levezetett egyenlet számos térbeli hangterjedés leírására szolgáló matematikai modell kiindulása. Gömbhullám hangterjedés esetén az azonos zavarási állapotok koncentrikus gömbfelületen helyezkednek el, a matematikai leírást gömbi koordinátarendszerben előnyös elvégezni. A Laplace differenciál operátor gömbi koordinátákkal,

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2}ctg\vartheta\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$$

A hangtéri változók térbeli megoszlása gömbszimmetrikus, a jellemzők kizárólag a centrumtól mért távolság függvényei,

$$\frac{\partial}{\partial r}(\ldots) \neq 0 \ , \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi}(\ldots) = 0 \ , \qquad \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\ldots) = 0$$

A Laplace operátor kifejezésben minden tag nulla, amelyben valamelyik szögkoordináta szerinti derivált szerepel. A nem nulla értékű tagokkal a hullámegyenlet gömbi koordinátákkal,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right) = 0$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát r-el,

$$\frac{r}{a^2}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} - \left(r\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r^2} + 2\frac{\partial \Phi'}{\partial r}\right) = 0$$

a bal oldalon a zárójelen belüli tagok összege az rΦ szorzat sugár szerinti kétszeres deriváltja,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2(r\Phi')}{\partial t^2}-\frac{\partial^2(r\Phi')}{\partial r^2}=0$$

Az egyenlet alakja megegyezik az egydimenziós síkhullám hangterjedésre vonatkozó egyenletével, így az általános megoldás, a kétszeres deriváltak argumentuma alapján most nem Φ-re, hanem rΦ-re,

$$r\Phi'=f\left(t-\frac{r}{a}\right)+g\left(t+\frac{r}{a}\right)$$

Osszuk el a kifejezés mindkét oldalát r-el, Φ-re a hullámfüggvény,

$$\Phi'(r,t)=\frac{f\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}+\frac{g\left(t+\frac{r}{a}\right)}{r}$$

Megjegyzések,

- Az f és g kétszer folytonosan differenciálható, tetszőleges függvények. A mechanikai zavarás alakjára a hullámegyenlet nem tesz megkötést. Hasonlóan a síkhullámokhoz, a folytonos, rugalmas közegben létrehozott, gyakorlatilag tetszőleges gerjesztés hatására hanghullám jön létre.

- Az „f" függvény összetevő a plusz r irányban, a „g" függvény összetevő a mínusz r irányban haladó hullámokat írja le.

- Szabad térben csak az „f" függvény összetevőnek van reális fizikai létjogosultsága. Véges helyen és időpontban véges amplitúdójú, mínusz r irányban haladó hullám eredete egy végtelen idővel korábban és távolról indított zavarás, amely a valóságban nem jöhet létre.

- A lineáris akusztikában szokásos egyszerűsítések miatt a hullámegyenlet jobb oldala nulla. A homogén hullámegyenlet csak a hangterjedés leírására alkalmas, a hangkeltés és hangcsillapodás modellezésére nem.

- A zavarás amplitúdója a centrumtól mért távolsággal fordított arányban változik. Hangforrás és csillapodás hiányában a forrástól távolodva a hangtérben a forrás körül felvett koncentrikus gömbfelületeken áthaladó hangteljesítmény állandó. A gömbfelület nagysága és az intenzitás között fordított arányos kapcsolatban van. A pillanatnyi hangintenzitás a hangnyomás négyzetével, illetve a gömbfelület a sugár négyzetével arányos. Így a kifejezés négyzetgyökét véve állandó hangteljesítmény esetén a hangnyomás amplitúdó a sugárral lesz fordítottan arányos. A hangnyomás és a részecskesebesség skalárpotenciál között korábban bemutatott kapcsolat alapján, az amplitúdó és a sugár közötti fordított arányos kapcsolat Φ-re is igaz (ld.: a hullámfüggvény nevezőjében az r változó).

Harmonikus gömbhullám:

Egy pozitív r irányában haladó, $\widehat{\Phi}$ amplitúdójú, ω szögfrekvenciájú harmonikus gömb hanghullám hullámfüggvénye a részecskesebesség skalárpotenciál változóra,

$$\Phi'(r,t)=\frac{\widehat{\Phi}}{r}\cdot e^{i(\omega t-kr)}$$

A skalárpotenciál hullámfüggvény ismeretében határozzuk meg a részecskesebességet,

$$\underline{v}'=grad\Phi'=\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\underline{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi'}{\partial\vartheta}\underline{e}_\vartheta+\frac{1}{r sin\vartheta}\frac{\partial\Phi'}{\partial\varphi}\underline{e}_\varphi$$

A gömbszimmetria miatt a jobb oldalon az összeg három tagjából csak az első nem nulla,

$$v' = \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\widehat{\Phi}}{r} \cdot e^{i(\omega t - kr)}\right) = -\left(\frac{1}{r} + ik\right)\frac{\widehat{\Phi}}{r} \cdot e^{i(\omega t - kr)}$$

A hangnyomás,

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\widehat{\Phi}}{r} \cdot e^{i(\omega t - kr)}\right) = -i\rho_0\omega \frac{\widehat{\Phi}}{r} \cdot e^{i(\omega t - kr)}$$

A hangnyomás és a részecskesebesség hányadosa, a fajlagos akusztikai impedancia (Z), fontos hangtéri jellemző, szabadon terjedő síkhullámok esetén az egyensúlyi sűrűség és a hangsebesség szorzata ($Z=\rho_0 a$). Ha meghatározzuk a fajlagos akusztikai impedancia értékét gömbhullám hangterjedésre, összehasonlítva a kapott kifejezést a síkhullámra vonatkozó impedanciával, meghatározható lesz az a távolság, amelynél a gömbhullám közelítőleg síknak tekinthető. Ezt a közelítést korábban már sokszor használtuk, és a távolság nagyságát szemlélet alapján becsültük, a javasolt számítással konkrét értéket tudunk rá meghatározni.

$$Z_g = \frac{p'}{v'} = \frac{-i\rho_0\omega \frac{\widehat{\Phi}}{r} \cdot e^{i(\omega t - kr)}}{-\left(\frac{1}{r} + ik\right)\frac{\widehat{\Phi}}{r} \cdot e^{i(\omega t - kr)}} = \frac{i\rho_0\omega}{\frac{1}{r} + ik} = \frac{i\rho_0 \frac{\omega}{k} kr}{1 + ikr} = \rho_0 a \frac{ikr}{1 + ikr} =$$

A nevezőből a képzetes tagot a komplex konjugálttal szorozva tudjuk eltüntetni,

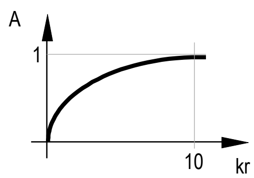
$$= \rho_0 a \frac{ikr}{1 + ikr}\frac{1 - ikr}{1 - ikr} = \rho_0 a \frac{k^2r^2 + ikr}{1 + k^2r^2} = \rho_0 a \cdot A \cdot e^{i\varphi}$$

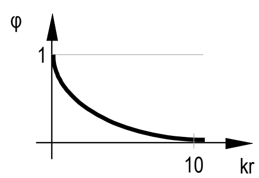
ahol, (A) a gömb- illetve síkhullám terjedési impedancia közötti amplitúdó korrekció, a $\rho_0 a$ szorzathoz képesti eltérés nagyságát tartalmazza,

$$A = \sqrt{\left(\frac{k^2r^2}{1 + k^2r^2}\right)^2 + \left(\frac{kr}{1 + k^2r^2}\right)^2} = \frac{kr}{\sqrt{1 + k^2r^2}}$$

illetve, (φ) a gömb- illetve síkhullám terjedési impedancia közötti fázis tényező, a hangnyomás és a részecskesebesség közötti fáziskülönbség nagyságát mutatja,

$$\varphi = arctg \frac{\frac{kr}{1 + k^2r^2}}{\frac{k^2r^2}{1 + k^2r^2}} \sqrt{\left(\frac{k^2r^2}{1 + k^2r^2}\right)^2 + \left(\frac{kr}{1 + k^2r^2}\right)^2} = arctg \frac{1}{kr}$$





Jellegre helyesen az amplitúdó korrekció (A) és a fázis tényező (φ) a kr szorzat függvényében

A gömbhullám és a síkhullám hangterjedésre vonatkozó fajlagos akusztikai impedanciák közötti különbség elmosódása a hullámszám (frekvencia) és a távolság együttes függvénye. A kr=10 radián fázis behelyettesítésnél az amplitúdó korrekció (A) értéke három tizedesre kerekítve 0,995 az eltérés az 1-től 0,5%, illetve a fázis tényező (φ) 0,1 radián (5,7 fok, pl.: átlag intenzitás számításánál, ha vesszük a koszinuszát, három tizedesre kerekítve 0,995 az eltérés az 1-től szintén 0,5%). Ha kr≥10 radián, a szokásos pontossági elvárások mellett, a gömb- illetve síkhullám terjedési impedancia közötti különbség elhanyagolhatóan kicsi, és a számításoknál a gömbhullám jó közelítéssel síkhullámnak tekinthető. A kr<10 radián esetén az impedanciák eltérnek, gömbhullámtérben a síkhullám közelítés a számítás pontatlanságát eredményezi.

9.2. Gyakorló feladatok

Gy.1. Vezesse le és elemezze a homogén akusztikai hullámegyenlet gömbhullámokra vonatkozó alakját a részecskesebesség skalárpotenciál változóra! Írja fel az egyenlet általános gömbhullám megoldását szabad térben, és magyarázza el a megoldás függvény fizikai tartalmát!

Gy.2. Pontszerű hangforrás által kibocsátott hangteljesítményt hangnyomás méréssel szeretnénk meghatározni. A méréshez 100Hz, 1kHz és 10kHz frekvenciákon számolja ki azokat a távolságokat, ahol a hangnyomás és a részecskesebesség közelítőleg azonos fázisban van, illetve a gömb hullámtér szűk környezetben síkhullámnak közelíthető! A hangsebesség 340m/s.

Megoldás:

$$kr \geq 10 \quad ; \quad r \geq \frac{10}{k} = \frac{10}{\frac{\omega}{a}} = \frac{10a}{2\pi f}$$

$$100Hz: \quad r \geq \frac{10 \cdot 340}{2\pi \cdot 100} \approx 5{,}41m$$

$$1kHz: \quad r \geq \frac{10 \cdot 340}{2\pi \cdot 1000} \approx 0{,}541m$$

$$10kHz: \quad r \geq \frac{10 \cdot 340}{2\pi \cdot 10000} \approx 0{,}0541m$$
