Mechanikai hasonlóságok a folyékony kontinuumok turbulens mozgásában

Alkalmazási példák aszimptotikus megoldásokra

Prof. Dr. Czibere Tibor

Miskolci Egyetem
Áramlás és Hőtechnikai Gépek Tanszék
2005. március 11.
Miskolc-Egyetemváros

T a r t a l o m

- A turbulens mozgások és a *Kármán*-féle hasonlósági hipotézis
- A turbulens áramlás alapegyenletei és örvénytételei
- Turbulens ingadozás az *együttmozgó* relatív koordináta rendszerben
- A *természetes* koordinátarendszer
- Az ingadozás mozgásegyenletének egy *partikuláris* megoldása
- A *sztochasztikus* turbulenciamodell
- Az alapegyenletek a sztochasztikus turbulenciamodellel
- Néhány példa nyíróáramlások aszimptotikus megoldására

A turbulens mozgások leírása

alapelv: **pillanatérték = középérték + ingadozás**

időbeni középérték:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{t_0}\int_{t}^{t+t_0} \Phi_T(\mathbf{r},\tau)\,d\tau$$

a turbulens *sebességtér*:

$$\mathbf{v}_T(\mathbf{r},t) = \mathbf{v}(\mathbf{r},t) + \mathbf{v}'(\mathbf{r},t)$$

a turbulens *örvénytér*:

$$\Omega_T(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{v}_T(\mathbf{r},t)$$

a turbulens *ingadozás sebességtere*:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r},t)$$

A turbulens mozgások leírása

(folytatás)

folyékony kontinuum:

$$\rho = const.$$

a feszültségtenzor:

$$\mathbf{F}_T(\mathbf{r},t) = -p_T\mathbf{I} + \sigma_T(\mathbf{r},t)$$

a Stokes formula:

$$\sigma_T = \rho\upsilon\left(\mathbf{v}_T \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}_T\right)$$

tömegmegmaradás:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_T(\mathbf{r},t) = 0$$

a mozgásegyenlet:

$$\rho\frac{d\,\mathbf{v}_T}{dt} = -\rho\nabla U - \nabla p_T + \mathrm{Div}\,\sigma_T$$

az örvénytétel $\upsilon \to 0$ esetén:

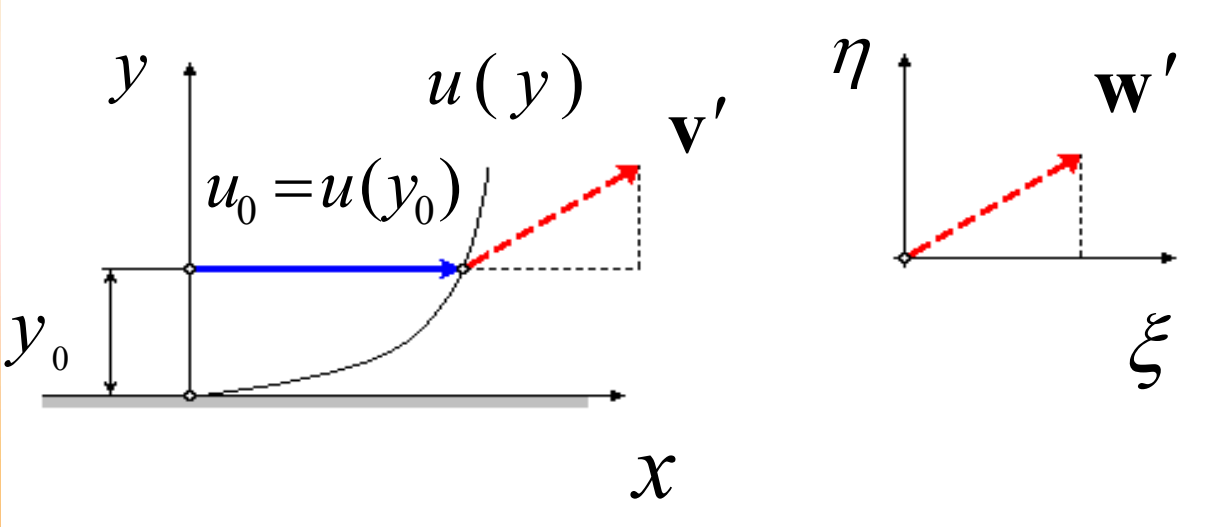
$$\frac{d}{dt}\left(\nabla \times \mathbf{v}_T\right) = 0$$

A turbulens mozgások Kármán-féle hasonlósági hipotézise:

I. A lamináris áramlás Navier-Stokes mozgásegyenletéhez azt feltételezve jutunk, hogy az áramlás terének minden pontjában a ***molekuláris mozgásképek mechanikailag hasonlók***, csak hosszúság- és időléptékben különböznek egymástól.

Kérdés: mi következik abból a feltevésből, hogy turbulens áramlás esetén *a turbulens ingadozások mozgásképei is mechanikailag hasonlók egymáshoz***?**

II. Kísérleti tapasztalatok alapján élhetünk azzal a feltevéssel, hogy a falközeli rétegektől eltekintve ***a turbulens középsebesség eloszlása nem függ az áramló közeg viszkozitásától.***



Kétdimenziós áramlásban az ingadozás sebesség komponensei egy skalár $\Psi(x, y, t)$ <u>*áramfüggvényből*</u> hely szerinti deriválással származtathatók:

<u>*a sebességtér*</u>:

$$\mathbf{v}_T(x, y, t) = \left(u(y) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \mathbf{i} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \mathbf{j}$$

<u>*az örvénytér*</u>:

$$\Omega_T(x, y, t) = \nabla \times \mathbf{v}_T = -\left(\frac{du}{dy} + \Delta \Psi \right) \mathbf{k}$$

Örvénytétel

Örvénytétel az $u_o = const.$ sebességgel mozgó (*együttmozgó*) relatív koordinátarendszerben:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \left(u - u_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{du}{dy} + \Delta \Psi \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dy} + \Delta \Psi \right) = 0$$

$$u(y) = u_0 + \left(\frac{du}{dy} \right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)_0 \frac{(y - y_0)^2}{2} + \cdots$$

Az $u(y)$ sorát (a harmad- és ennél magasabb-fokú tagok elhanyagolása után) az örvénytételbe behelyettesítve adódik a ***turbulens ingadozás mozgásegyenlete***:

$$\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial t}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0\frac{\partial \Psi}{\partial x}-\left[\left(\frac{du}{dy}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0\frac{(y-y_0)^2}{2}\right]\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial x}+\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial y}=0$$

Két mozgásfolyamat *mechanikai hasonlóságáról* akkor beszélhetünk, ha azok mozgásegyenletei *alkalmas* (geometriai és fizikai) *transzformációval* egyikből a másikba ill. egy közös harmadikba átvihetők.

***Transzformáció*:**

$x\ ,\ y$ rendszer	$\xi\ ,\ \eta$ ingadozás-tér

geometriai:

$$x - x_0 = l\,\xi \quad ; \quad dx = l\,d\xi$$

$$y - y_0 = l\,\eta \quad ; \quad dy = l\,d\eta$$

fizikai:

$$\Psi\,(x, y, t) = K\ \ f\,(\xi, \eta, \tau)$$

$$t = T\,\tau$$

l: geometriai lépték; *K, T*: fizikai léptékek

$$\frac{1}{lT}\frac{\partial \Delta f}{\partial \tau}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0\frac{\partial f}{\partial \xi}-\left[\left(\frac{du}{dy}\right)_0\frac{\eta}{l}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0\frac{\eta^2}{2}\right]\frac{\partial \Delta f}{\partial \xi}-$$

$$-\frac{K}{l^3}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \Delta f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \Delta f}{\partial \eta}\right)=0$$

Kritérium:

$$\frac{1}{lT}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0=\left(\frac{du}{dy}\right)_0\frac{1}{l}=\frac{K}{l^3}$$

Az ingadozás transzformált mozgásegyenlete:

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \xi} - \left[\eta + \frac{\eta^2}{2} \right] \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \Delta f}{\partial \eta} = 0$$

A turbulens ingadozás $f(\xi, \eta, \tau)$

dimenziótlan áramfüggvénye a fizikai térben uralkodó mozgásjellemzőktől független; a teljesen kifejlődött turbulencia belső mechanizmusa nem függ az áramló közeg viszkozitásától.

A Kármán-féle hasonlósági kritérium következményei:

$$\frac{1}{lT} = \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 = \left(\frac{du}{dy}\right)_0 \frac{1}{l} = \frac{K}{l^3}$$

$$l = \frac{du}{dy} \Big/ \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$K = l^2 \frac{du}{dy}$$

$$T = \frac{l^2}{K}$$

$$\tau'_{xy} = -\rho\overline{u'v'} = \rho\frac{K^2}{l^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_0 = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_0 K\frac{du}{dy}$$

Kármán-konstans:

$$\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_0}$$

$$\tau'_{xy} = \rho\kappa^2 l^2 \left|\frac{du}{dy}\right| \frac{du}{dy}$$

Két megjegyzés:

1.) A turbulencia jelensége ***mindig háromdimenziós***, akkor is, ha a turbulens középsebesség csak két helykoordináta függvénye; más szóval a $\mathbf{v}'$ ingadozási sebesség harmadik komponense akkor sem hanyagolható el [$w' \neq 0$], ha a főáramlás kétdimenziós. Laboratóriumi mérések igazolják például azt, hogy a kör keresztmetszetű csőáramlásban minden esetben áll az alábbi reláció: $0 < \overline{v'v'} < \overline{w'w'} < \overline{u'u'}$

2) A hasonlósági hipotézisen alapuló kétdimenziós turbulenciamodell a turbulens feszültségtenzor további elemeinek a meghatározására az $u(y)$ sorának bővítésével sem tehető alkalmassá. Ehhez a turbulens ingadozás térbeli jelenségét figyelembe vevő modell szükséges.

A turbulens áramlás alapegyenletei

(három mérleg: tömeg-, impulzus- és energia-mérleg az időbeni középértékekkel értelmezett sebességtérben:)

1) **a tömegmegmaradást kifejező *kontinuitási egyenlet*:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

összenyomhatatlan közeg esetén: $\rho = const$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

2) **a Reynolds-féle mozgásegyenlet:**

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\rho\nabla\left(U + \frac{p}{\rho}\right) + \eta\Delta\mathbf{v} + \mathrm{Div}\,\mathbf{F}_R$$

a turbulens feszültségtenzor: $\mathbf{F}_R = -\rho\left(\overline{\mathbf{v}'\circ\mathbf{v}'}\right)$

3) **a belső energia egyenlete:**

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)T\right)=\nabla(\lambda\nabla T)-\rho c\nabla\left(\overline{\mathbf{v}'T'}\right)+\rho(\varphi+\varepsilon)$$

viszkózus disszipáció: $$\varphi=\frac{\eta}{\rho}(\mathbf{v}\circ\nabla):(\mathbf{v}\circ\nabla+\nabla\circ\mathbf{v})$$

turbulens disszipáció: $$\varepsilon=\frac{\eta}{\rho}\overline{(\mathbf{v}'\circ\nabla):(\mathbf{v}'\circ\nabla+\nabla\circ\mathbf{v}')}$$

Megjegyzés: Lamináris esetben e három egyenlet az ismeretlen függvények meghatározásához *elegendő*, turbulens esetben az ismeretlen függvények száma azonban több a rendelkezésre álló (skalár) differenciálegyenletek számánál, tehát az egyenlet-rendszer *alulhatározottá* válik, s ezért a turbulens probléma megoldásához további egyenletekkel kell kiegészíteni.

További két mérleg- (transzport-) egyenlet

1) **a turbulens feszültségtenzor mérlege:**

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\overline{\mathbf{v}'\circ\mathbf{v}'}\right)+\rho\left[(\mathbf{v}\circ\nabla)\cdot(\overline{\mathbf{v}'\circ\mathbf{v}'})+(\overline{\mathbf{v}'\circ\mathbf{v}'})\cdot(\nabla\circ\mathbf{v})\right]+$$

$$+2\eta\overline{(\mathbf{v}'\circ\nabla)\cdot(\nabla\circ\mathbf{v}')}-\overline{p'(\mathbf{v}'\circ\nabla+\nabla\circ\mathbf{v}')}+$$

$$+\mathrm{Div}\left[\rho(\overline{\mathbf{v}'\circ\mathbf{v}'\circ\mathbf{v}'})-\eta(\overline{\mathbf{v}'\circ\mathbf{v}'\circ\nabla})\right]+(\overline{p'\mathbf{v}'}\circ\nabla)+(\nabla\circ\overline{p'\mathbf{v}'})=0$$

az egyenlet egyes tagjainak fizikai jelentése:

* első a turbulens feszültségtenzor *időbeni teljes megváltozása*;
* második a feszültségtenzor *produkciója*,
* a harmadik tag a turbulens feszültségtenzor *disszipációja*;
* a negyedik *a nyomás- és deformációsebesség korrelációja*
* az utolsó három tag a turbulens feszültségtenzor *diffúziója*.

2) **a turbulens kinetikus energia mérlege:**

$$\frac{dk}{dt} + \left(\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}\right) : \left(\nabla \circ \mathbf{v}\right) + \varepsilon +$$

$$+ \operatorname{div}\left[\overline{\mathbf{v}'\left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}{2} + \frac{p'}{\rho}\right)} - \upsilon \nabla k - \upsilon \operatorname{Div}\left(\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}\right)\right] = 0$$

az egyenlet egyes tagjainak fizikai jelentése:

* az első tag a turbulens kinetikus energia *szubsztanciális (időbeni teljes) megváltozása*;
* a második tag a turbulens kinetikus energia *produkciója,*
* a harmadik tag a turbulens kinetikus energia *disszipácója* és
* a negyedik tag a turbulens kinetikus energia *diffúziója*.

A vektorvonalak megmaradási tétele

(*H. Ertel* és *A. A. Friedmann*)*)

Ha egy adott $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ ***sebességtérben*** **mozgó kontinuumban egy másik *tetszőleges*** $\mathbf{a}(\mathbf{r},t)$ ***vektortér*** **is van, akkor az** $\mathbf{a}\times d\mathbf{r}=\mathbf{0}$ **egyenlettel értelmezett *vektorvonalak megmaradásának***

[más szóval annak, hogy a mozgás teljes időtartama alatt *azokat* mindig ugyanazok az elemek alkossák, és az *elemi vektorcsövek* $\mathbf{a}\cdot d\mathbf{A} = a\ dA_n$ ***intenzitása*** **is megmaradjon],**

***a szükséges és elegendő feltétele*:**

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{v})=\mathbf{0}$$

*) lásd pl.: N.J. Kotschin – L.A. Kibel – N.W. Rose: Theoretische Hydromechanik *Akademie Verlag Berlin (1954)* pp. 138-142

A turbulens áramlás örvénytételei

1) **a *pillanatértékekkel* értelmezett sebességtérben:**

$$\frac{\partial \Omega_T}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_T \cdot \nabla\right)\Omega_T - \left(\Omega_T \cdot \nabla\right)\mathbf{v}_T = \upsilon \Delta \Omega_T$$

2) **a *középértékekkel* értelmezett sebességtérben:**

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \nabla\right)\Omega - \left(\Omega \cdot \nabla\right)\mathbf{v} = \nabla \times \left(\overline{\mathbf{v}' \times \Omega'}\right) + \upsilon \Delta \Omega$$

3) **a *turbulens ingadozás* sebességterében:**

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \left(\mathbf{v}' \cdot \nabla\right)\Omega' - \left(\Omega' \cdot \nabla\right)\mathbf{v}' = \left(\Omega \nabla\right)\mathbf{v}' + \upsilon \Delta \Omega'$$

A turbulens ingadozás mozgásegyenlete

A teljesen kifejlődött turbulens áramlás egy tetszőleges rögzitett P pontjának a környezetében kialakuló $\mathbf{v}'(\mathbf{r},t)$ *ingadozási sebességteret* a P pontban uralkodó közép-sebességgel egyenletesen mozgó un. *együttmozgó relatív koordinátarendszerben* a harmadik örvénytételből $\upsilon \equiv 0$ mellett adódó differenciálegyenlet írja le:

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla)\Omega' - (\Omega' \cdot \nabla)\mathbf{v}' = (\Omega \cdot \nabla)\mathbf{v}'$$

Megjegyzés: Mivel $\Omega' = \nabla \times \mathbf{v}'$ utóbbi örvénytétel szerint a $\mathbf{v}'$ sebességingadozás a középsebességtér $\Omega(\mathbf{r},t)$ örvényterével van egyértelműen meghatározva; következésképpen *a turbulens feszültségtenzor is a középsebességtér örvényerősségével és nem a deformációsebességgel áll összefüggésben.*

A Kármán-féle hasonlósági hipotézis nyomvonalát követve a $\mathbf{v}'(\mathbf{r},t)$ ingadozási sebességtérhez hozzárendelünk egy $\Psi(\mathbf{r},t)$

vektorpotenciált: $\mathbf{v}'(\mathbf{r},t) = \nabla \times \Psi(\mathbf{r},t)$

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \left[(\nabla \times \Psi)\cdot\nabla\right]\Delta\Psi - \left(\Delta\Psi\cdot\nabla\right)(\nabla\times\Psi) = \left(\Omega\cdot\nabla\right)(\nabla\times\Psi)$$

és ezt a mozgásegyenletet transzformáljuk

q_1, q_2, q_3 az együttmozgó relatív rendszer	ξ, η, ζ a turbulens ingadozás tere

geometriai: $H_1 dq_1 = l\, d\xi$ $\quad H_2 dq_2 = l\, d\eta$ $\quad H_3 dq_3 = l\, d\zeta$

fizikai: $\Psi(q_1, q_2, q_3, t) = K\,\mathbf{f}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$

A turbulens ingadozás transzformált mozgásegyenlete:

$$\frac{K}{Tl^2}\frac{\partial \Delta\mathbf{f}}{\partial\tau}+\frac{K^2}{l^4}\left[(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\nabla\right]\Delta\mathbf{f}-\frac{K^2}{l^4}\left(\Delta\mathbf{f}\cdot\nabla\right)(\nabla\times\mathbf{f})=\frac{\Omega K}{l^2}\left(\mathbf{e}_\Omega\cdot\nabla\right)(\nabla\times\mathbf{f})$$

a hasonlóság kritériuma:

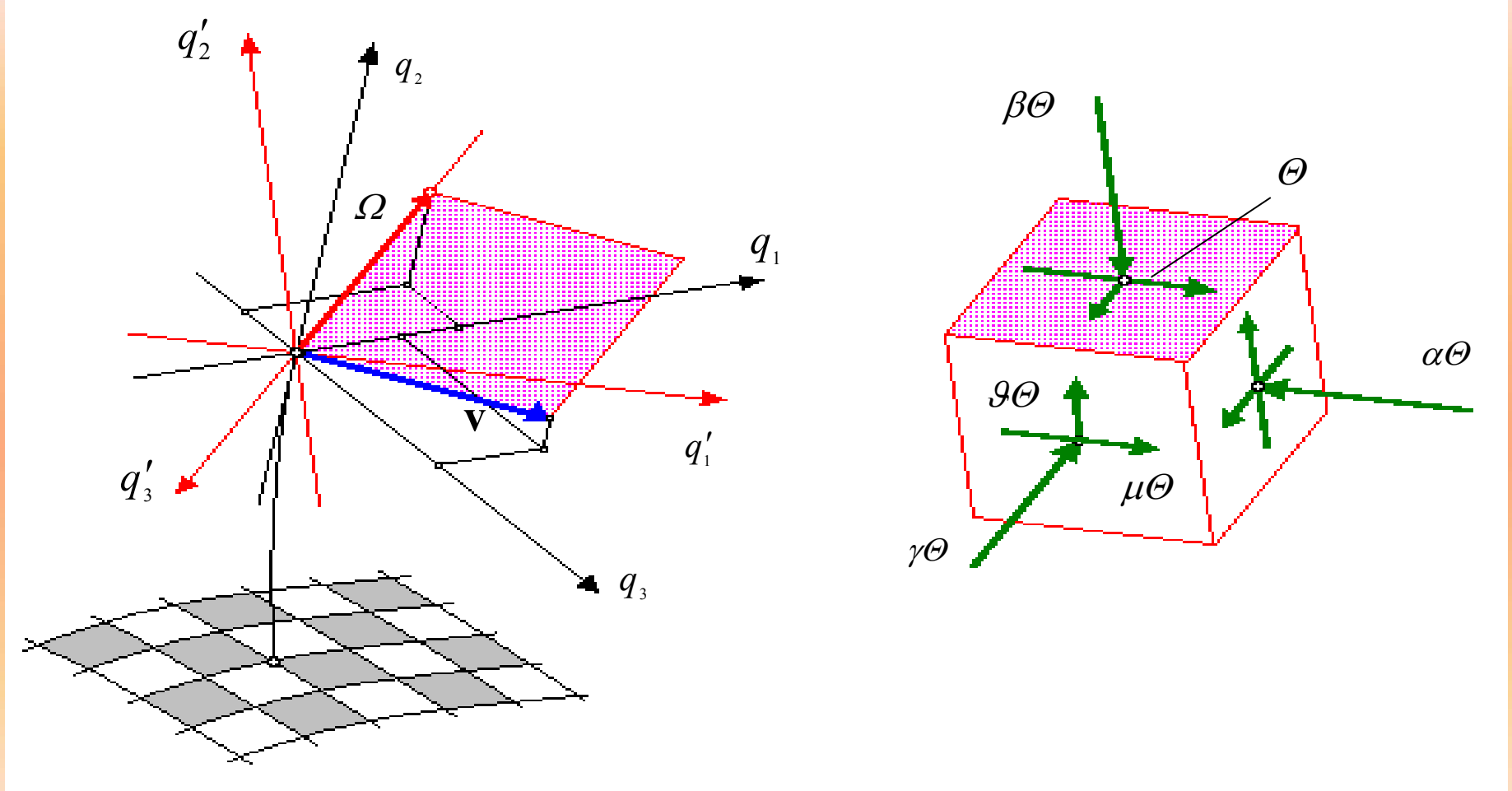
$$\frac{1}{lT}=\frac{K}{l^3}=\frac{\Omega}{l}$$

$$\frac{\partial \Delta\mathbf{f}}{\partial\tau}+\left[(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\nabla\right]\Delta\mathbf{f}-\left(\Delta\mathbf{f}\cdot\nabla\right)(\nabla\times\mathbf{f})=\left(\mathbf{e}_\Omega\cdot\nabla\right)(\nabla\times\mathbf{f})$$

A turbulens ingadozási sebességtér $\mathbf{f}(\xi,\eta,\zeta,\tau)$ *dimenziótlan vektorpotenciálja* a fizikai térben uralkodó mozgásjellemzőktől független; a teljesen kifejlődött turbulencia belső mechanizmusa nem függ az áramló közeg viszkozitásától.

A **természetes koordinátarendszer** bázisvektorait a helyi sebesség- és örvényvektorok határozzák meg:

$$\mathbf{e}'_3 = -\frac{\nabla \times \mathbf{v}}{\Omega} \qquad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{1-S^2}}\left(\frac{\mathbf{v}}{v} \times \frac{\nabla \times \mathbf{v}}{\Omega}\right) \qquad \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3 \qquad S = \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \frac{\nabla \times \mathbf{v}}{\Omega}$$



A két koordinátarendszer közötti *transzformáció tenzora* és annak transzponáltja:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}'_j$$

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{e}'_j \circ \mathbf{e}_i$$

$$E_{i1} = W\left(\frac{v_i}{v} - S\frac{\Omega_i}{\Omega}\right) \qquad E_{i2} = W\frac{v_{i+1}\Omega_{i+2} - v_{i+2}\Omega_{i+1}}{v\Omega} \qquad E_{i3} = -\frac{\Omega_i}{\Omega} \qquad (i = 1,2,3)$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - S^2}} \qquad S = \frac{v_1\Omega_1 + v_2\Omega_2 + v_3\Omega_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}}$$

A vektor- és tenzorterek transzformációja:

$$\mathbf{v}(q_1, q_2, q_3, t) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}(q'_1, q'_2, q'_3, t)$$

$$\mathbf{F}_R(q_1, q_2, q_3, t) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_R(q'_1, q'_2, q'_3, t) \cdot \mathbf{E}^T$$

A vizsgálat három helyszíne (koordinátarendszere):

q_1, q_2, q_3 számítási	—	q_1', q_2', q_3' együttmozgó	—	ξ, η, ζ ingadozástér

a q_1', q_2', q_3' valamint a ξ, η, ζ koordinátarendszerek egymásnak megfelelő tengelyei párhuzamosak

<u>A turbulens ingadozás mozgásegyenletének</u> a sebesség-ingadozás dimenziótlan vektorpotenciáljával felírt alakja az *együttmozgó természetes koordinátarendszerből származó* ξ, η, ζ koordinátarendszerben:

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \tau} + \left[(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \nabla\right] \Delta \mathbf{f} - \left(\Delta \mathbf{f} \cdot \nabla\right)(\nabla \times \mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial \zeta}(\nabla \times \mathbf{f})$$

mechanikai hasonlósága miatt az $\mathbf{f}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ vektorpotenciálból adódó $\mathbf{w}' = \nabla \times \mathbf{f}$ sebességtér a <u>*turbulens ingadozás képterének*</u> tekinthető.

A hasonlósági kritérium következményei:

$$\frac{1}{lT} = \frac{K}{l^3} = \frac{\Omega}{l} \qquad \frac{1}{T} = \frac{K}{l^2} \qquad \frac{K}{l^2} = \Omega$$

Miután az Ω örvényerősség a turbulens ingadozás $\Psi(\mathbf{r}, t)$ vektorpotenciáljának a transzformációja során adottnak tekintendő, az előbbi egyenletekben három az ismeretlenek száma, tehát közülük *egy szabadon választható*, és a másik kettő annak függvényeként adódik:

$$K = l^2 \Omega \quad ; \quad T = \frac{l^2}{K} = \frac{1}{\Omega}$$

A turbulencia $l(\mathbf{r})$ *léptékfüggvénye* az adott geometriai viszonyoknak megfelelően választandó, és figyelemmel arra is, hogy az áramlást határoló falakon el kell tűnnie.

A turbulens ingadozás mozgásegyenletének egy partikuláris megoldása:

a turbulens ingadozás sebességtere:

$$\mathbf{w}'(\xi,\eta,\zeta,\tau) = \nabla \times \mathbf{f}(\xi,\eta,\zeta,\tau)$$

a triviális $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$ egyenlet felhasználásával a turbulens ingadozás előbbi – az $\mathbf{f}(\xi,\eta,\zeta,\tau)$ dimenziótlan vektorpotenciállal felírt – mozgásegyenlete átalakítható:

$$\frac{\partial\ (\nabla \times \mathbf{w}')}{\partial\,\tau} + \nabla \times \left[(\nabla \times \mathbf{w}') \times \mathbf{w}'\right] = -\frac{\partial\,\mathbf{w}'}{\partial\zeta}$$

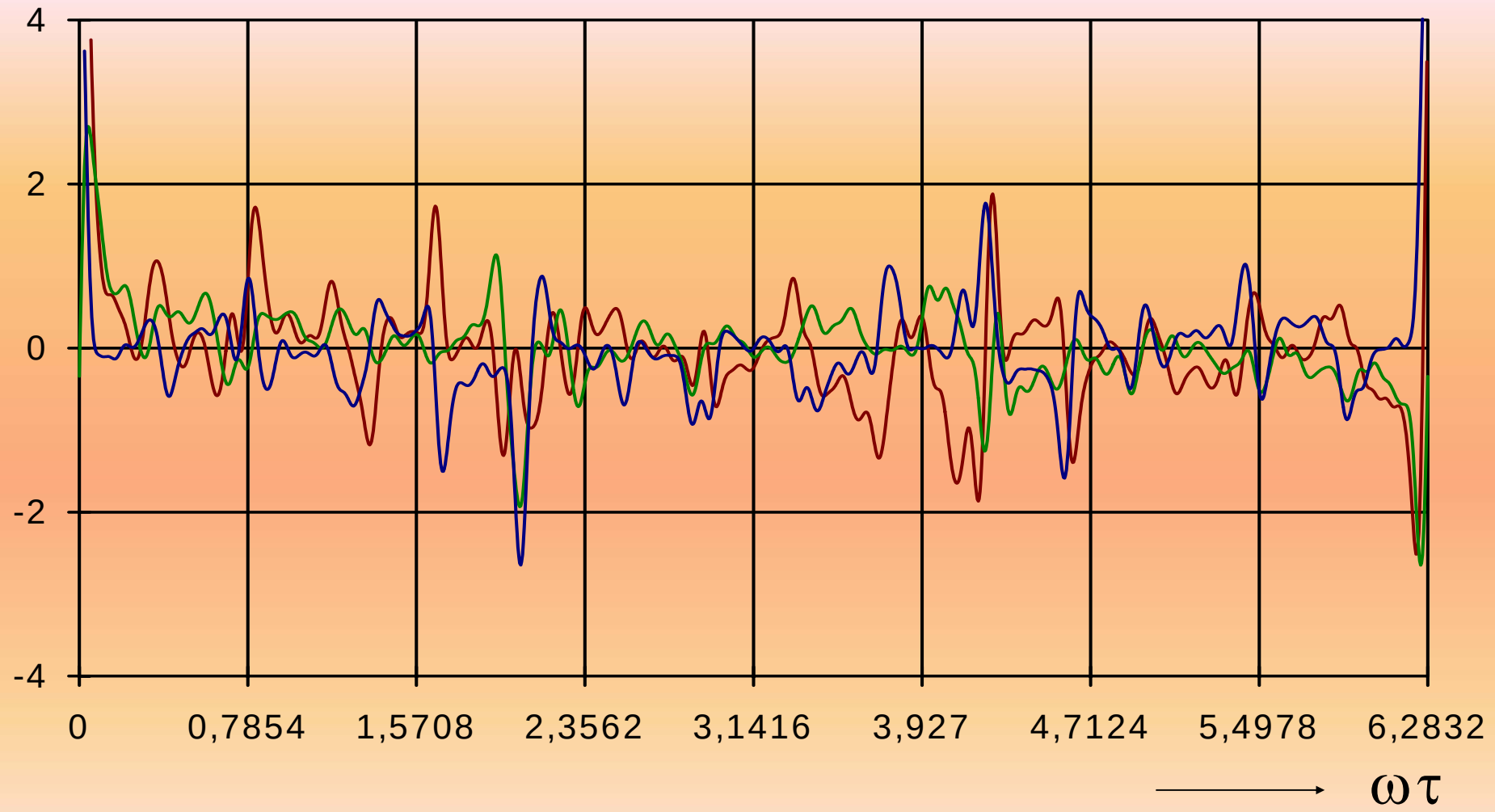
Ennek egy *partikuláris megoldása* a következő trigonometrikus sor alakjában előállítható*):

$$\mathbf{w}' = \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \begin{pmatrix} C_{1n} e^{n\xi} \cos[n(\zeta+\omega\tau)+\alpha_{1n}] - C_{2n} \sin[n(\zeta+\omega\tau)+\alpha_{2n}] \\ C_{2n} \cos[n(\zeta+\omega\tau)+\alpha_{2n}] - C_{3n} e^{-n\eta} \sin[n(\zeta+\omega\tau)+\alpha_{3n}] \\ C_{3n} e^{-n\eta} \cos[n(\zeta+\omega\tau)+\alpha_{3n}] - C_{1n} e^{n\xi} \sin[n(\zeta+\omega\tau)+\alpha_{1n}] \end{pmatrix}$$

Ha a C_{1n}, C_{2n}, C_{3n} és az α_{1n}, α_{2n}, α_{3n} egy-egy adott intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók, akkor az így képezett *véletlen amplitúdójú és véletlen fázisú* szinusz ill. koszinusz *hullámokkal* ***a turbulens ingadozás sebességtere jól modellezhető***.

*) Czibere, T.: Three dimensional stochastic model of turbulence *Journal of Computational and Applied Mechanics, Vol. 2., No. 1., (2001) Publ. of the University of Miskolc,* pp. 7-20

A dimenziótlan vektorpotenciál rotációja három komponensének egy periodushosszon belüli változása



Sztochasztikus turbulenciamodell a természetes koordinátarendszerben

A q_1', q_2', q_3' együttmozgó természetes koordinátarendszer bármely pontjának a ξ, η, ζ rendszer kezdőpontja felel meg, s így a <u>*sebességingadozás*</u> a q_1', q_2', q_3' rendszerben:

$$\mathbf{v}'(q_1', q_2', q_3', t) = l(q_1', q_2', q_3')\Omega(q_1', q_2', q_3', t)\,\mathbf{w}'(0,0,0,\tau)$$

$$\mathbf{w}'(0,0,0,\tau) = \varepsilon\,\mathbf{u}_0'(\tau)$$

$$\begin{pmatrix} u_{0,1}' \\ u_{0,2}' \\ u_{0,3}' \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N} \begin{pmatrix} C_{1n}\cos(n\omega\tau + \alpha_{1n}) - C_{2n}\sin(n\omega\tau + \alpha_{2n}) \\ C_{2n}\cos(n\omega\tau + \alpha_{2n}) - C_{3n}\sin(n\omega\tau + \alpha_{3n}) \\ C_{3n}\cos(n\omega\tau + \alpha_{3n}) - C_{1n}\sin(n\omega\tau + \alpha_{1n}) \end{pmatrix}$$

a természetes koordinátarendszerben bevezethetjük az un. ***hasonlósági tenzort*** a következő skalár elemekkel:

$$H_{ij} = \frac{\overline{u'_{0,i} u'_{0,j}}}{\overline{u'_{0,1} u'_{0,2}}} \qquad (i, j = 1,2,3)$$

a Kármán-konstans:

$$\kappa^2 = -\varepsilon^2 \overline{u'_{0,1} u'_{0,2}}$$

a domináns turb. nyírófeszültség:

$$\Theta(\mathbf{r}, t) = \rho (\kappa l \Omega)^2$$

és ezekkel ***a látszólagos turbulens feszültségtenzor*** így felírható a q'_1, q'_2, q'_3 természetes koordinátarendszerben

$$\mathbf{F}_R = \Theta(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{H}$$

A turbulens áramlás alapegyenletei összenyomhatatlan közegre a sztochasztikus turbulenciamodellel

1) a ***kontinuitási*** egyenlet:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

2) a ***mozgásegyenlet***:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho \nabla \Pi + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathrm{Div}\left(\Theta \mathbf{G}^*\right)$$

a *teljes* potenciál:

$$\Pi\ (\mathbf{r}, t) = U + \frac{p}{\rho} + \frac{2k}{3}$$

a turb. *kinetikus energia* fajlagos értéke:

$$k = -\frac{(\kappa\, l\Omega)^2}{2}\left(H_{11} + H_{22} + H_{33}\right)$$

a *domináns* turb. nyírófesz.:

$$\Theta\ (\mathbf{r}, t) = \rho\ (\kappa\ l\Omega\ )^2$$

az *örvényviszkozitási* tenzor:

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{E}^T$$

3) **a *teljes potenciál* egyenlete**

$$\rho\, \Delta \Pi = -\rho\, (\mathbf{v} \circ \nabla) : (\nabla \circ \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathrm{Div}\ (\Theta\, \mathbf{G}^*)$$

4) **az *örvénytétel* (örvénytranszport egyenlete)**

$$\rho \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\Omega - (\Omega \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = \eta \Delta \Omega + \nabla \times \mathrm{Div}\left(\Theta\, \mathbf{G}^*\right)$$

Áramlás hosszú egyenes csőben

A természetes és a számítási koordinátarendszer közötti *transzformáció* E tenzorának elemei:

$$E_{11} = 1 \quad ; \quad E_{12} = 0 \quad ; \quad E_{13} = 0$$

$$E_{21} = 0 \quad ; \quad E_{22} = \frac{dv}{dr} \Big/ \left|\frac{dv}{dr}\right| \quad ; \quad E_{23} = 0$$

$$E_{31} = 0 \quad ; \quad E_{32} = 0 \quad ; \quad E_{33} = \frac{dv}{dr} \Big/ \left|\frac{dv}{dr}\right|$$

a G^* *örvényviszkozitási* tenzor skalár elemei figyelemmel arra, hogy kétdimenziós esetben $H_{12} = H_{13} = 0$:

$$G^*_{11} = H^*_{11} \quad ; \quad G^*_{12} = \frac{dv}{dr} \Big/ \left|\frac{dv}{dr}\right| \quad ; \quad G^*_{13} = 0$$

$$G^*_{21} = \frac{dv}{dr} \Big/ \left|\frac{dv}{dr}\right| \quad ; \quad G^*_{22} = H^*_{22} \quad ; \quad G^*_{23} = 0$$

$$G^*_{31} = 0 \quad ; \quad G^*_{32} = 0 \quad ; \quad G^*_{33} = H^*_{33}.$$

a skalár mozgásegyenletek:

$$0 = -\rho \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \eta \left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} \right) + \frac{dv}{dr} \Big/ \left| \frac{dv}{dr} \right| \left(\frac{d\Theta}{dr} + \frac{\Theta}{r} \right)$$

$$0 = -\rho \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{d}{dr}\left(H_{22}^{*} \Theta \right) + (H_{22}^{*} - H_{33}^{*}) \frac{\Theta}{r}$$

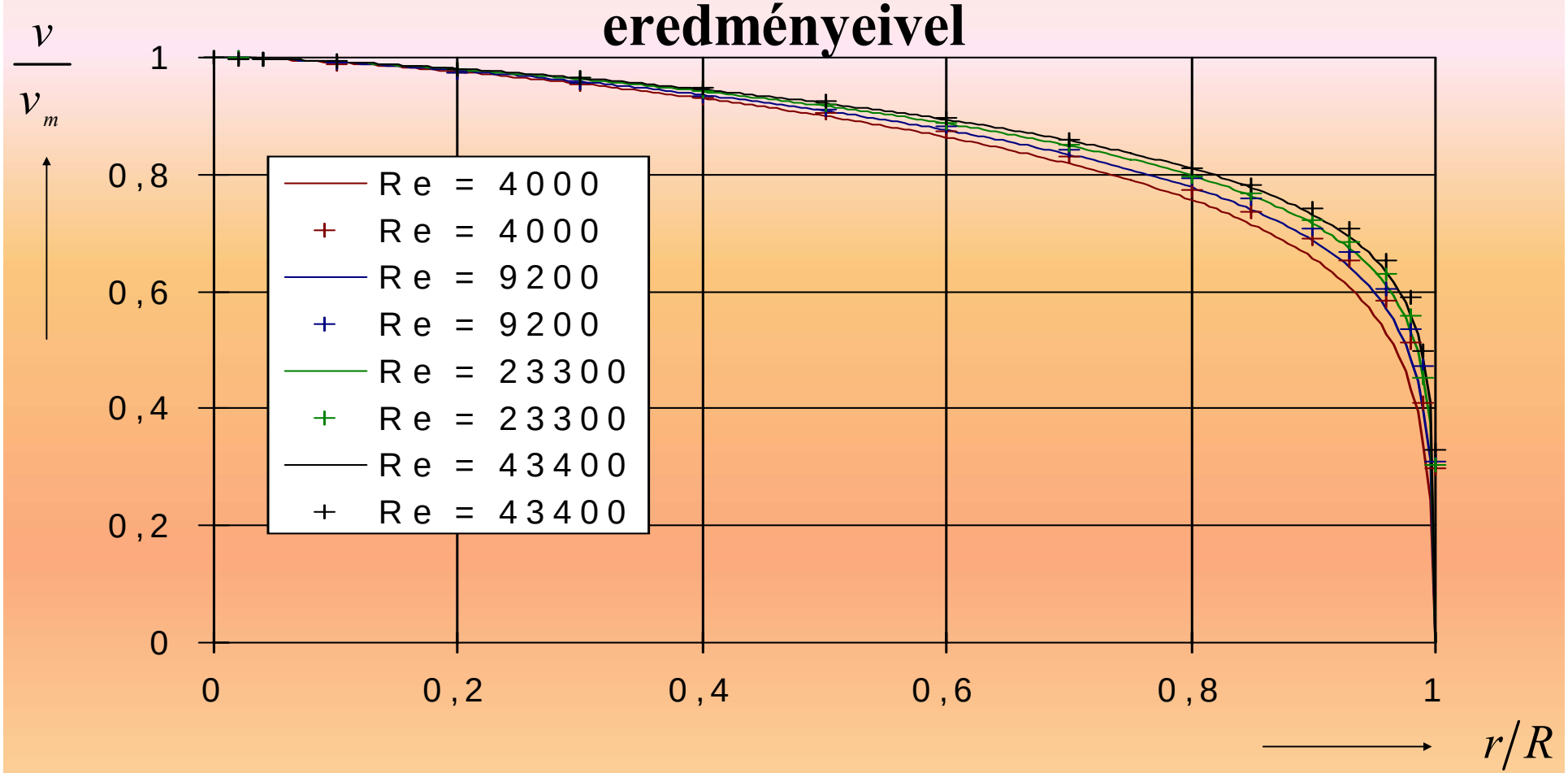
$$\Theta(r) = \rho \kappa^2 l^2(r) \Omega_{\varphi}^2(r) = \rho \kappa^2 l^2(r) \left(\frac{dv}{dr} \right)^2$$

a teljes potenciál egyenlete:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 0$$

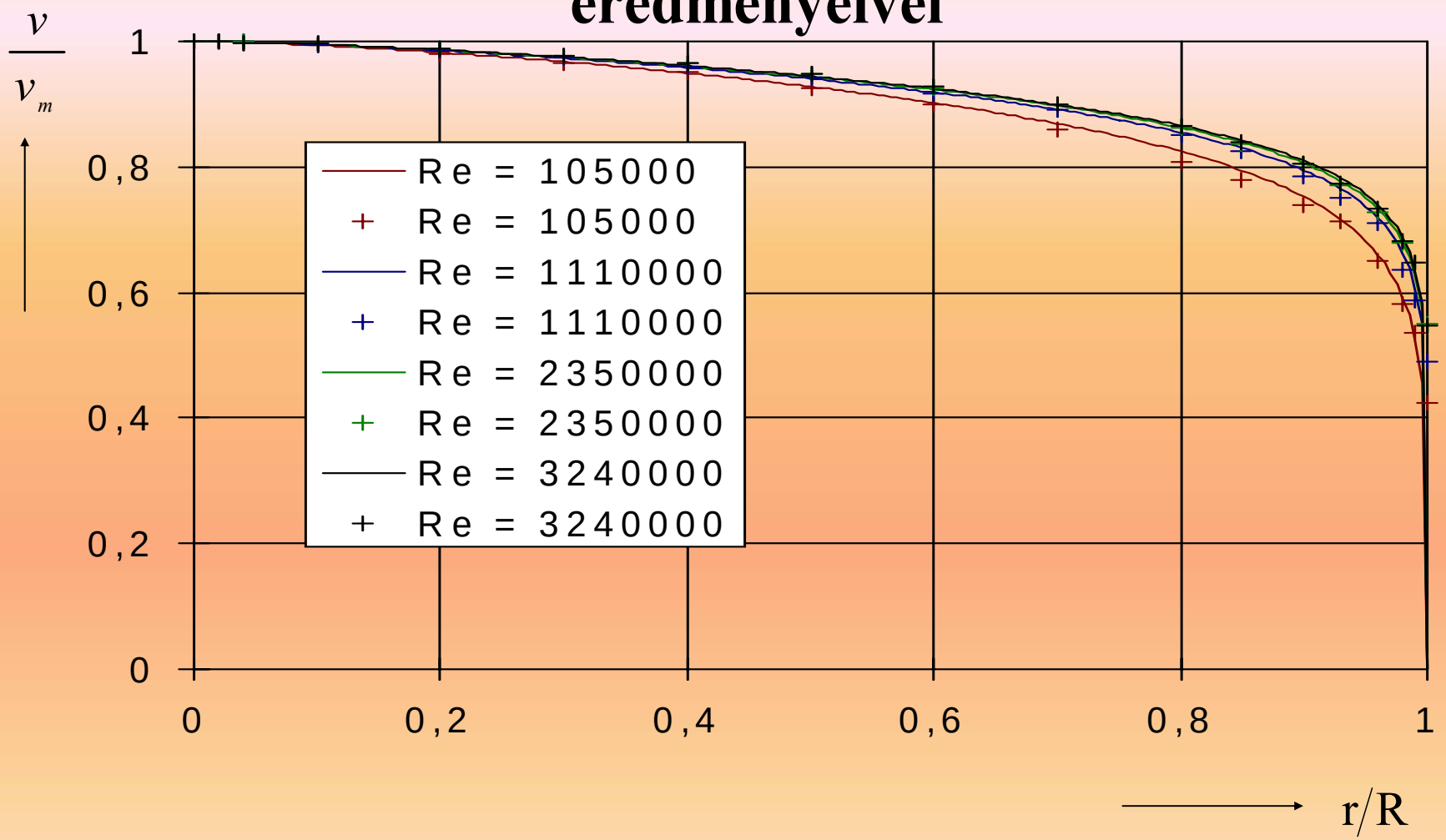
$$\Pi(x,r) = -\frac{\Delta \Pi}{L} x + b(r)$$

Kör keresztmetszetű csőáramlások számított sebességeloszlásai összehasonlítva Nikuradse*) mérési eredményeivel



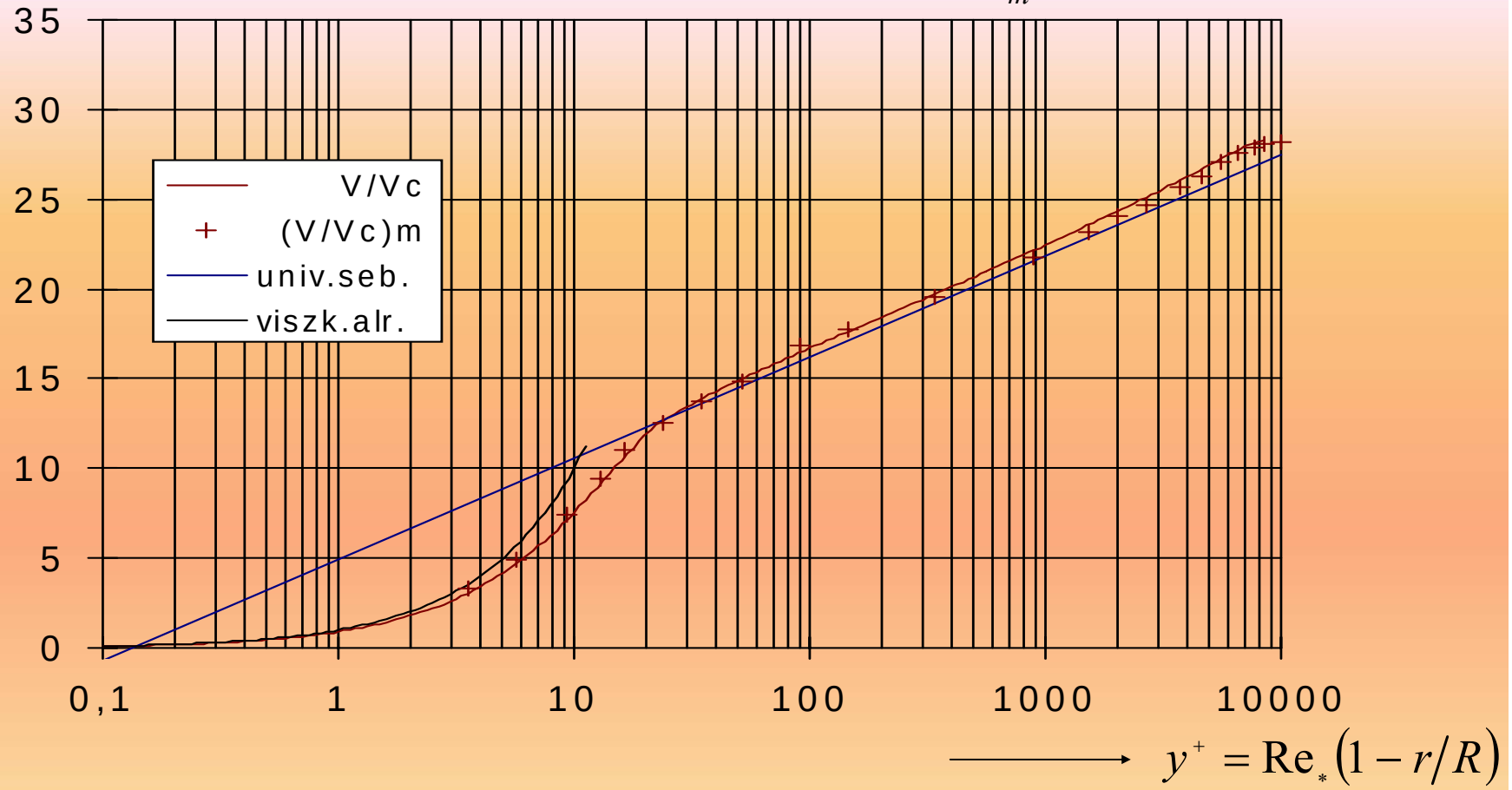
*) Nikuradse, J.: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren *VDI Forsch.heft 356 (1932)*

Kör keresztmetszetű csőáramlások számított sebességeloszlásai összehasonlítva Nikuradse*) mérési eredményeivel



*) Nikuradse, J.: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren *VDI Forsch.heft 356 (1932)*

Kör keresztmetszetű csőáramlások számított sebességeloszlásai összehasonlítva Laufer *) mérési eredményeivel $\mathrm{Re}_m = 500000$



*) Laufer, J. : The structure of turbulence in fully developed pipe flow *NACA Report 1174 (1954)*.

a léptékfüggvény:

$$l_*(r) = \left[\frac{l_0}{R} + \left(\frac{1}{2} - \frac{l_0}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$v_* = \sqrt{\frac{\Delta\Pi\ R}{2L}}$$

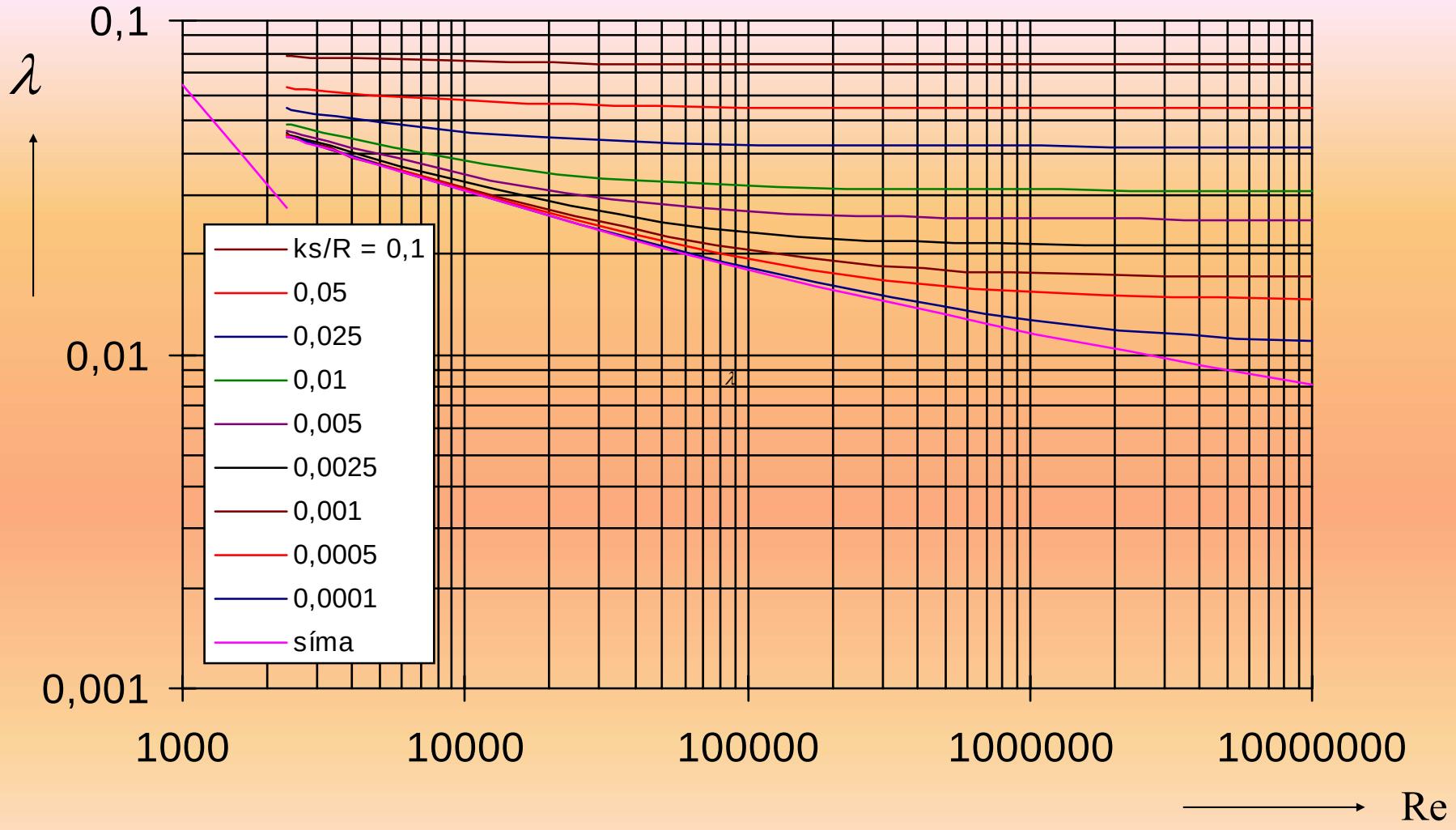
$$\mathrm{Re}_* = \frac{\rho\, v_* R}{\eta}$$

$$\lambda = 8\left(\frac{v_*}{\tilde{v}}\right)$$

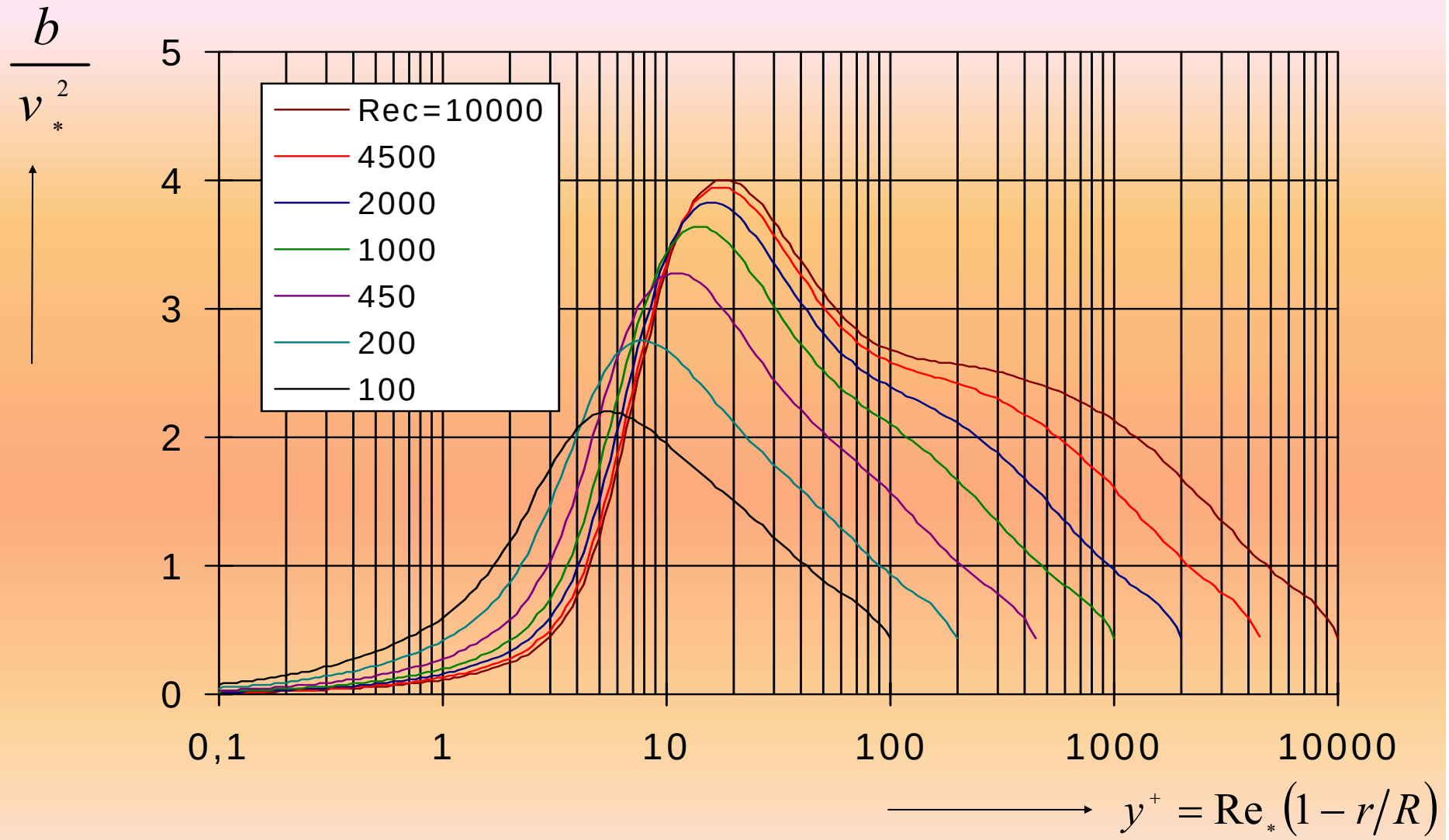
$$\frac{v_m}{v_*} = \frac{1}{\kappa}\ln \mathrm{Re}_* + 8{,}75 - \frac{1}{\kappa}\ln\left(3 + \mathrm{Re}_*\, k_S / R\right)$$

$$\frac{b_0}{v_*^2} = -\frac{\kappa^2}{3}\left(H_{11} + H_{22} + H_{33}\right)$$

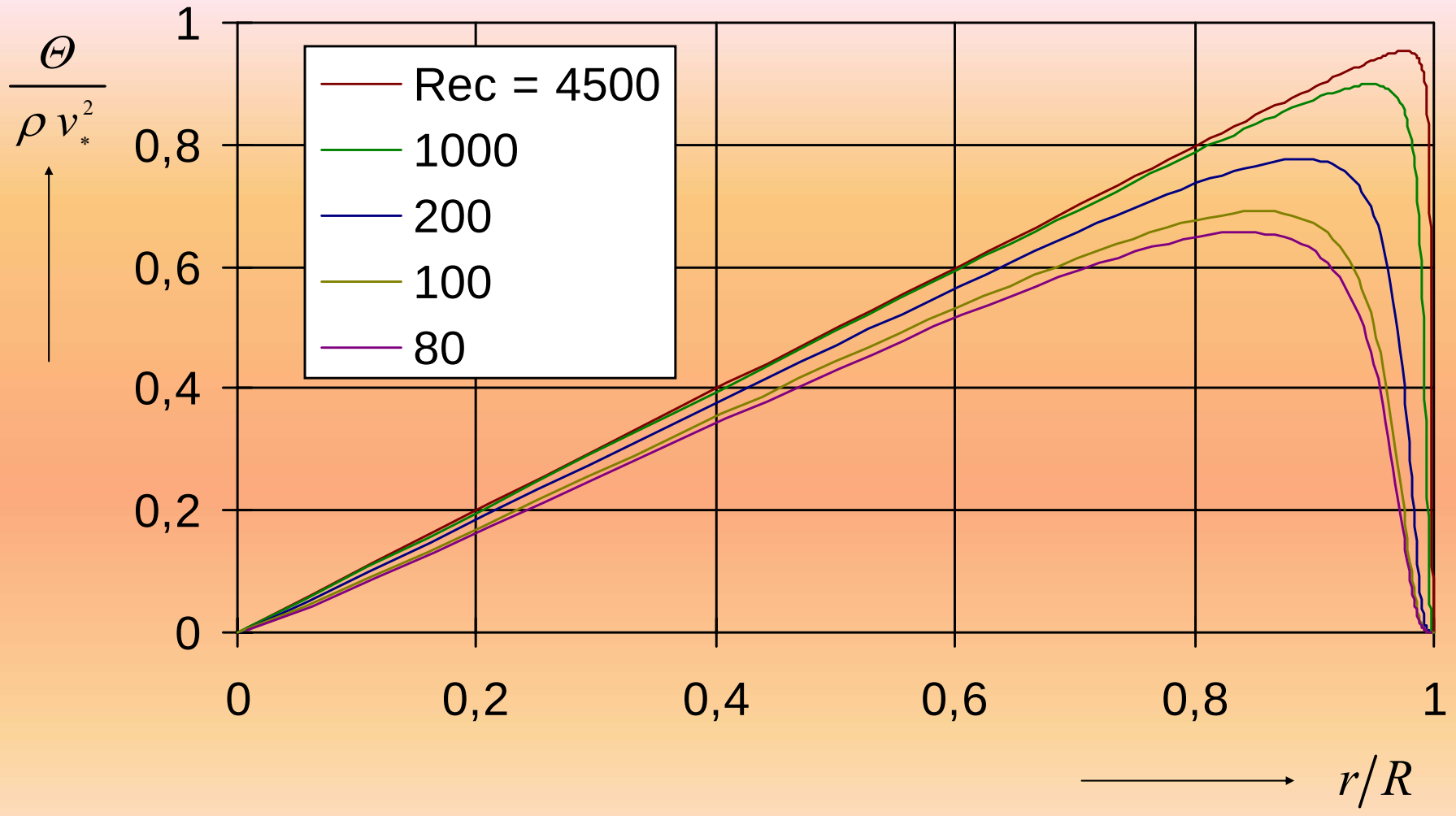
Érdes és hidraulikailag sima falú csövek ellenállástényezőinek változása a Re-szám függvényében



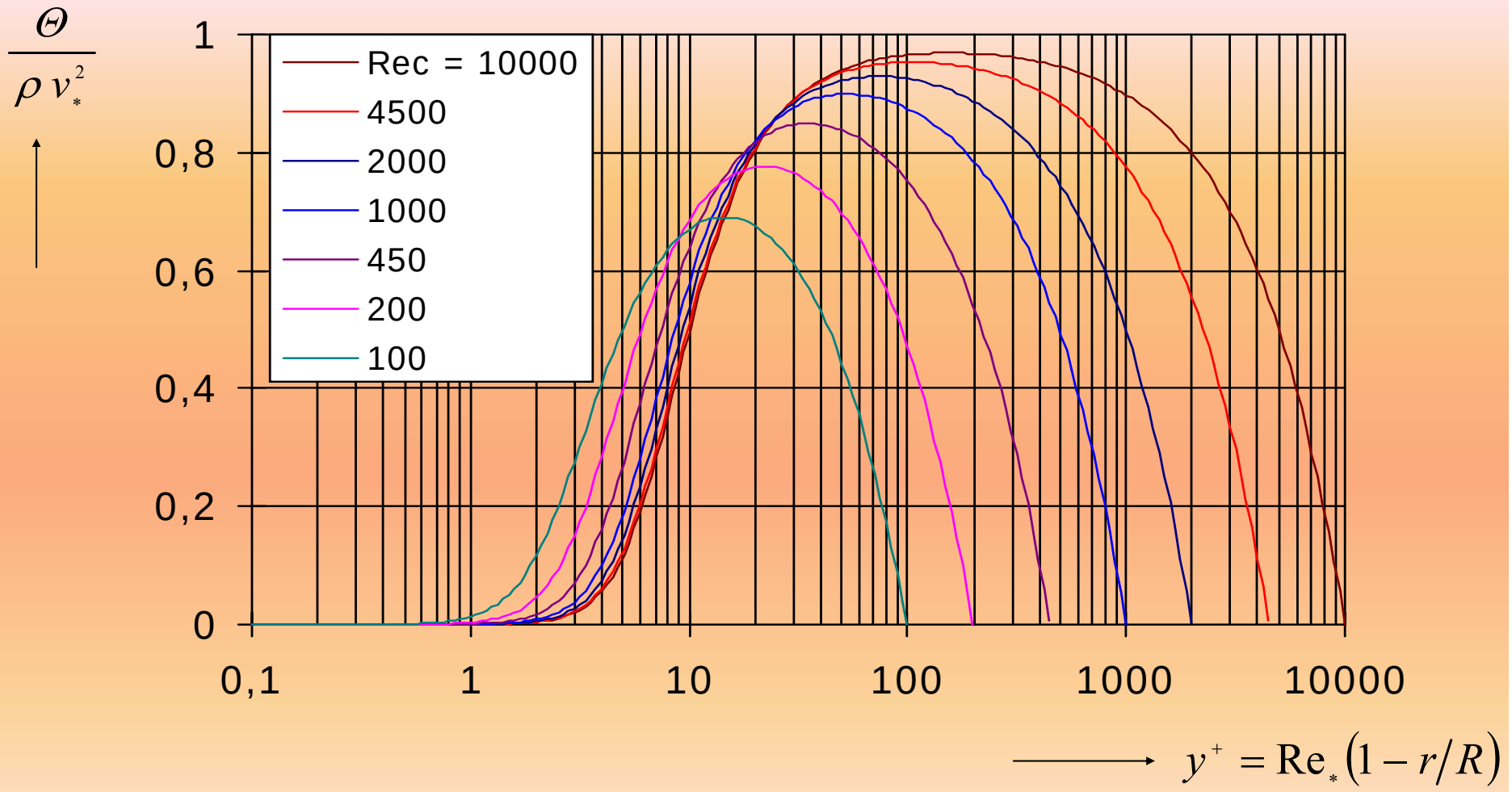
A turbulens feszültségtenzor első skalárinvariánsának különböző Re_*-számok mellett számított eloszlása



A domináns turbulens nyírófeszültség-eloszlások sugár-irányú változása kör keresztmetszetű csőben

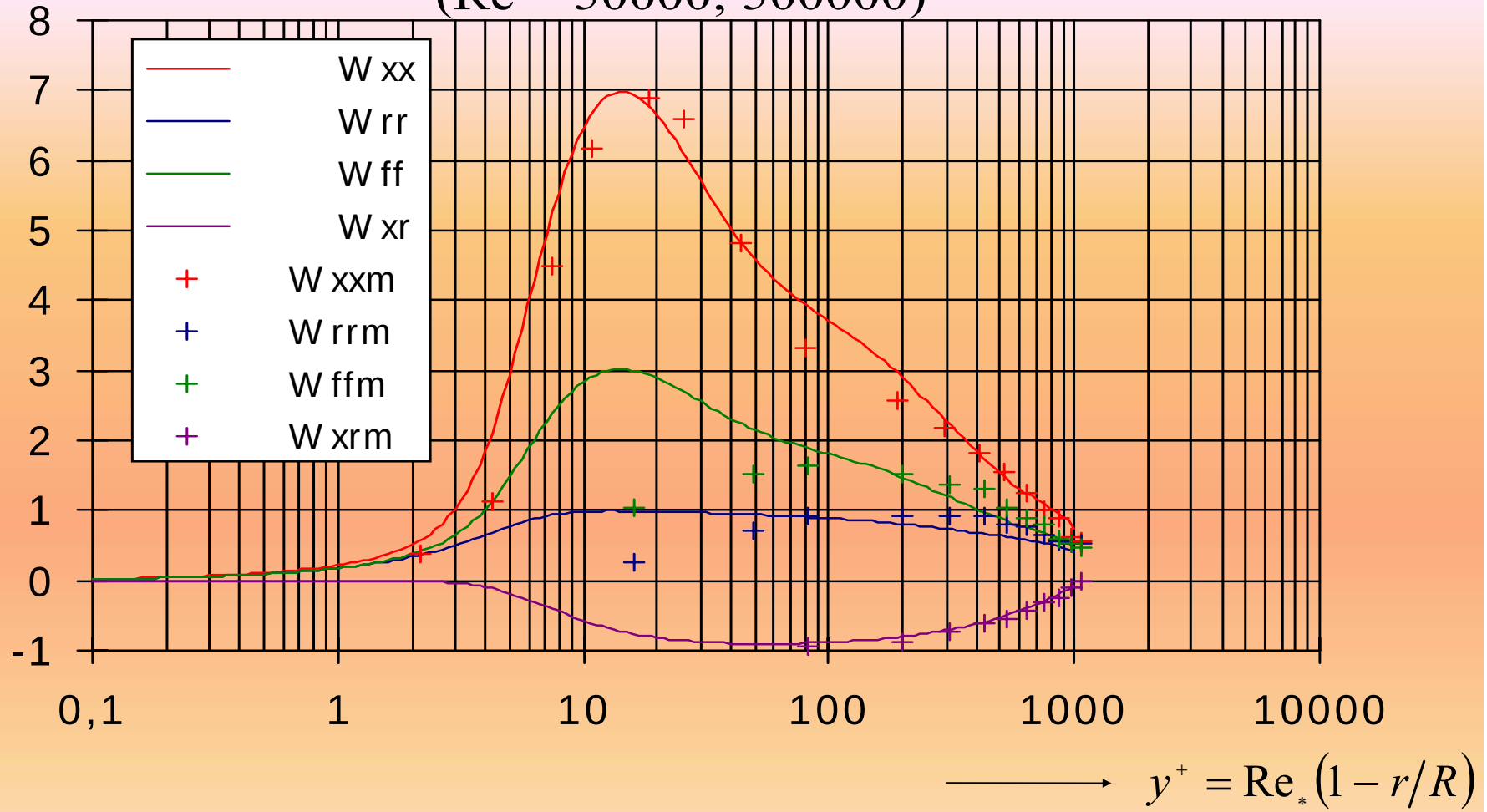


Különböző Re_*-számok mellett számított domináns turbulens nyírófeszültség-eloszlások kör keresztmetszetű csőben



A kör keresztmetszetű csőben kialakuló turbulens áramlás számított feszültségeloszlásainak összehasonlítása Laufer*) mérési eredményeivel

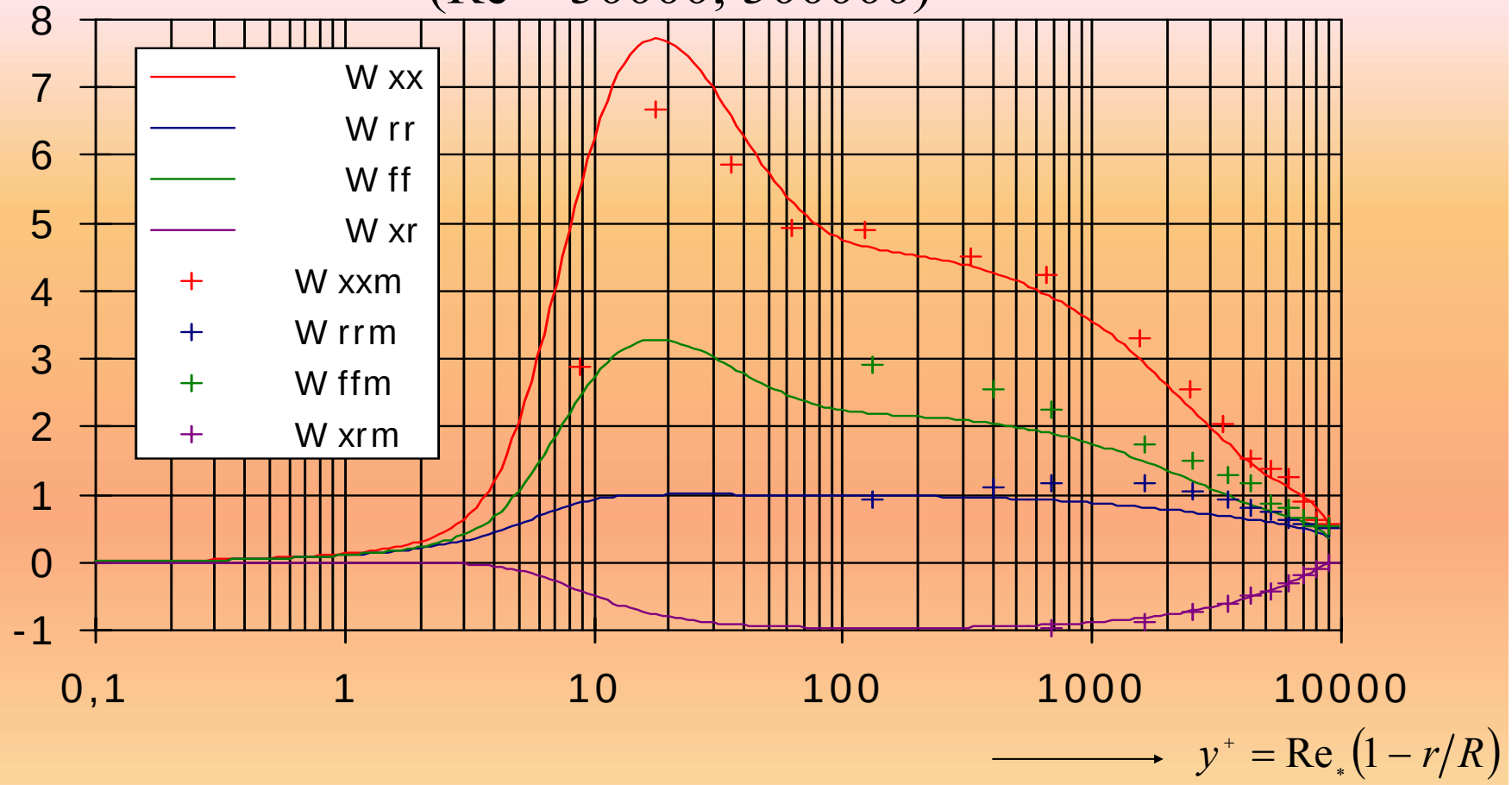
(Re = 50000; 500000)



*) Laufer, J. : The structure of turbulence in fully developed pipe flow *NACA Report 1174 (1954).*

A kör keresztmetszetű csőben kialakuló turbulens áramlás számított feszültségeloszlásainak összehasonlítása Laufer *) mérési eredményeivel

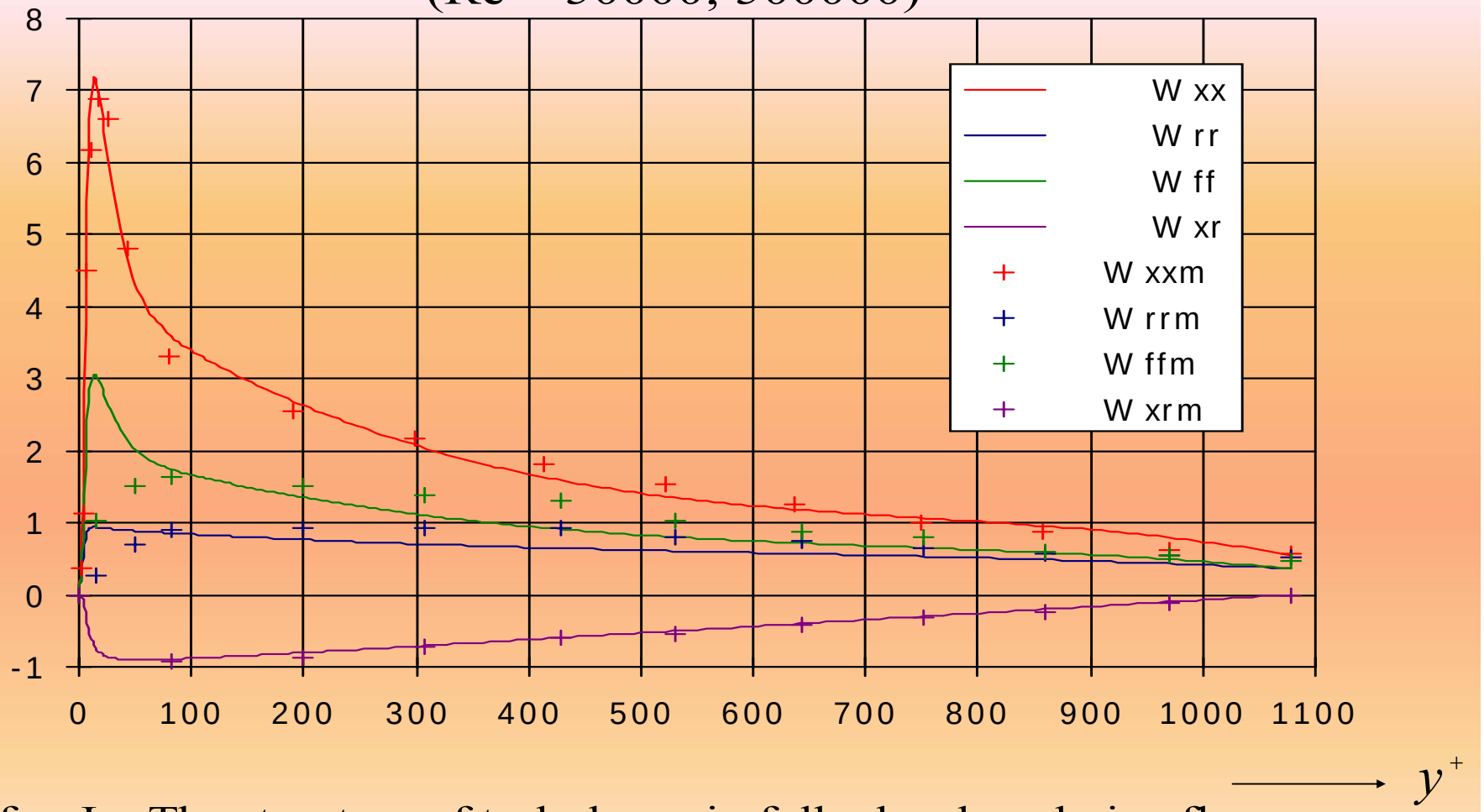
(Re = 50000; 500000)



*) Laufer, J. : The structure of turbulence in fully developed pipe flow *NACA Report 1174 (1954).*

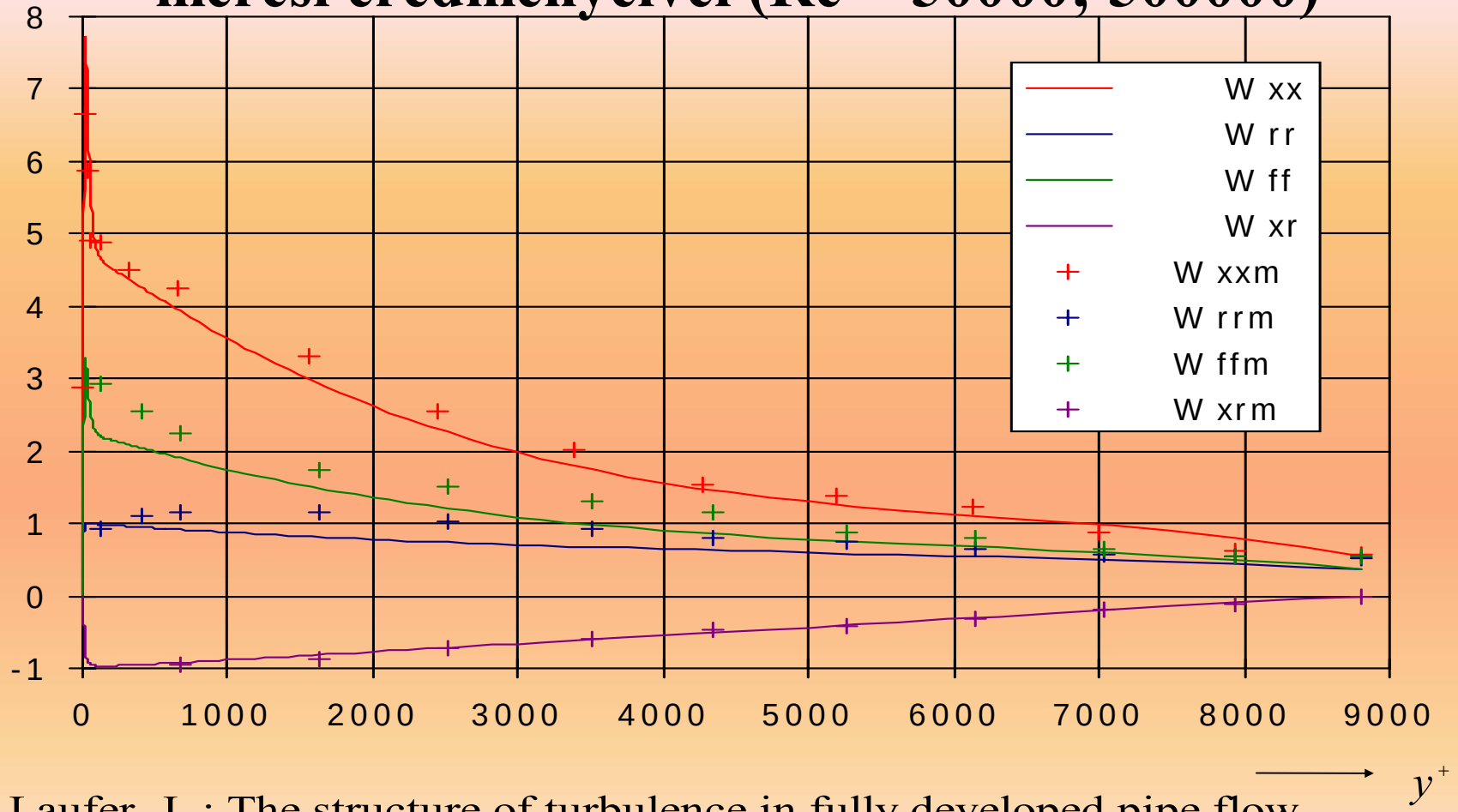
A kör keresztmetszetű csőben kialakuló turbulens áramlás számított feszültségeloszlásainak összehasonlítása Laufer*) mérési eredményeivel

(Re = 50000; 500000)



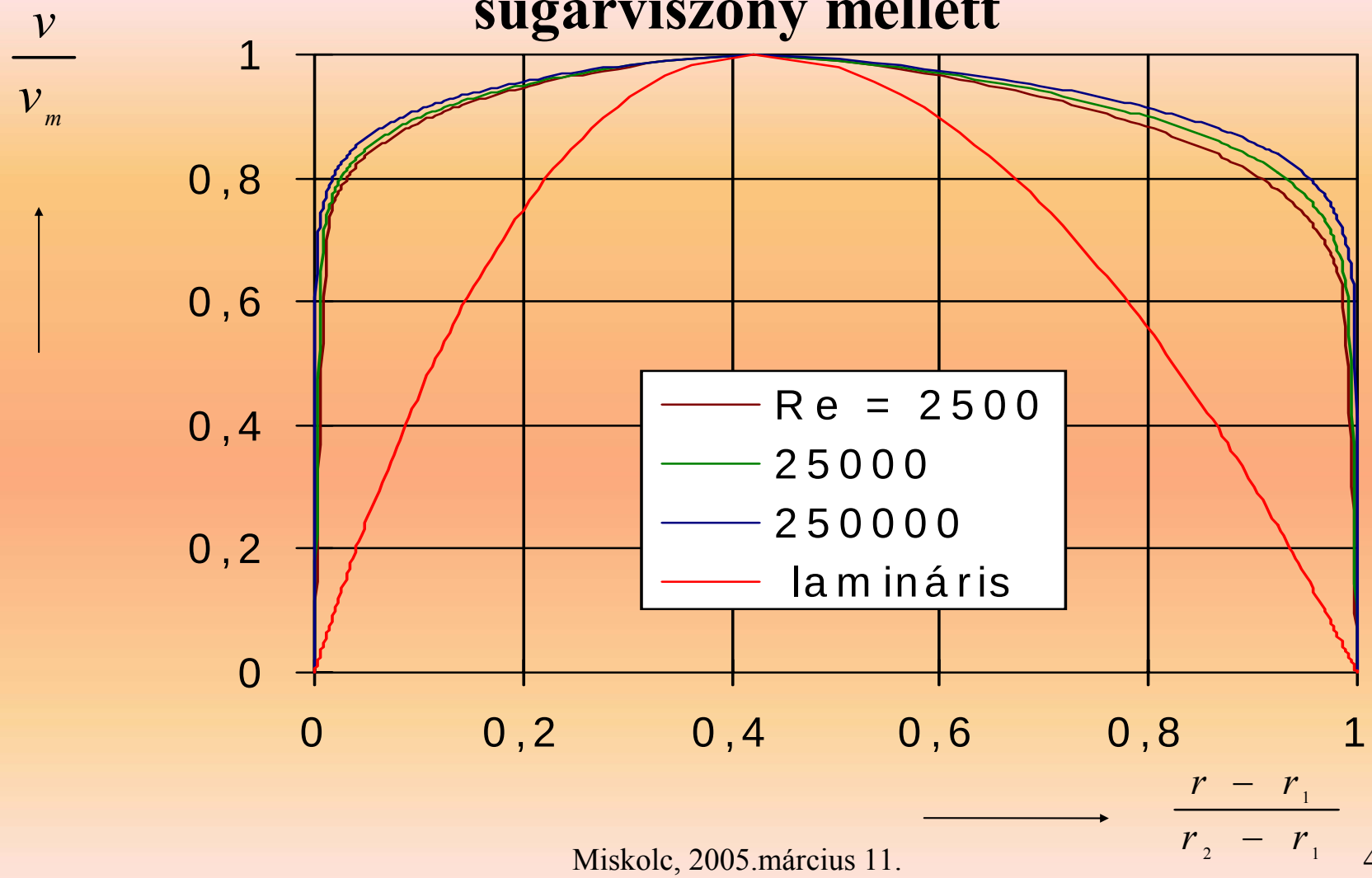
*) Laufer, J. : The structure of turbulence in fully developed pipe flow *NACA Report 1174 (1954).*

A kör keresztmetszetű csőben kialakuló turbulens áramlás számított feszültségeloszlásainak összehasonlítása Laufer*) mérési eredményeivel (Re = 50000; 500000)

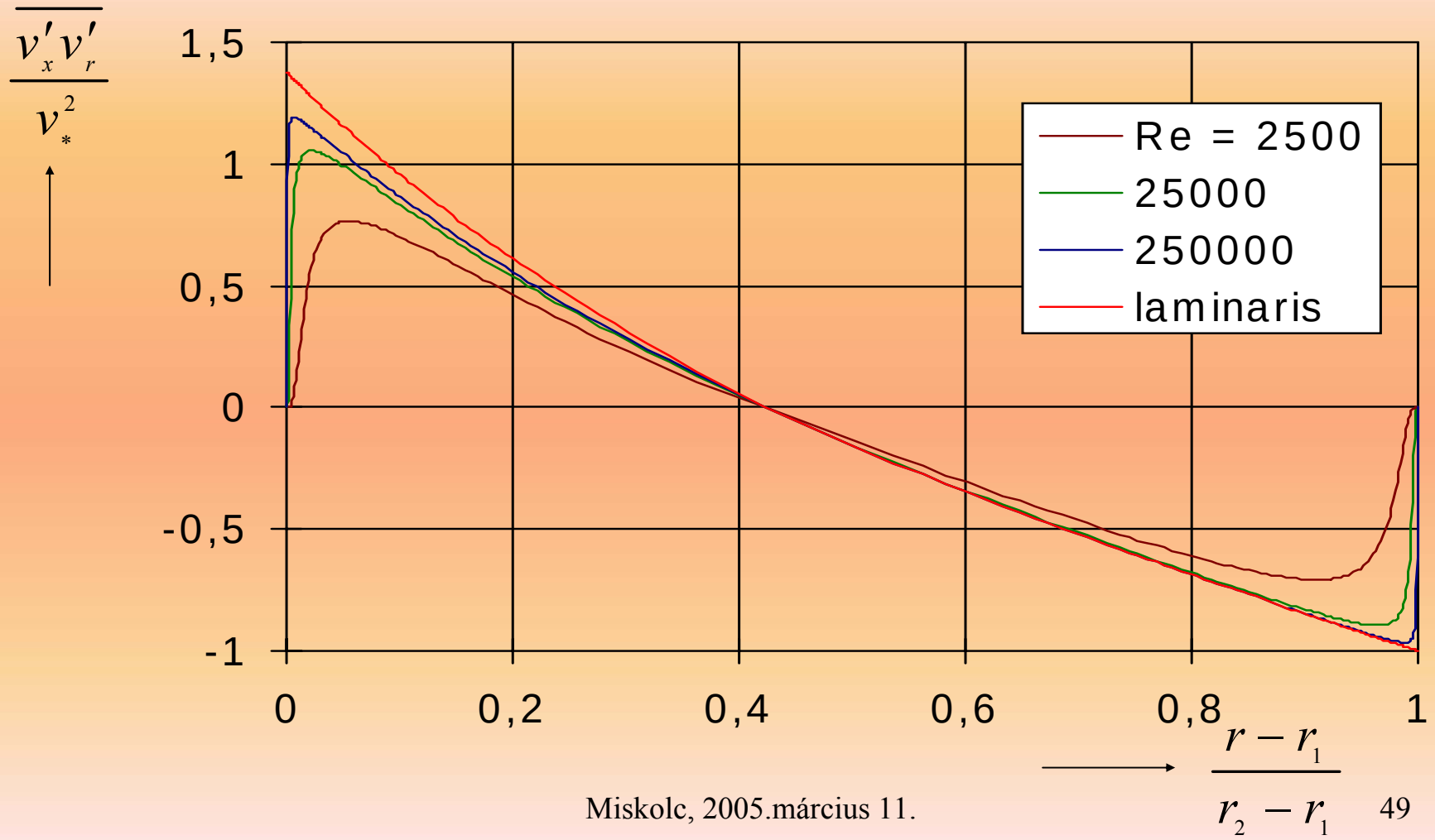


*) Laufer, J. : The structure of turbulence in fully developed pipe flow *NACA Report 1174 (1954).*

Körgyűrű keresztmetszetű csőben különböző Reynolds-számokhoz tartozó turbulens sebességprofilok összehasonlítása a lamináris sebességprofillal $r_1/r_2 = 0{,}4$ sugárviszony mellett



Körgyűrű keresztmetszetű csőben különböző Reynolds számokhoz tartozó turbulens nyírófeszültség-eloszlások összehasonlítása a lamináris áramlásban kialakuló viszkózus nyírófeszültség-eloszlással



Couette-áramlás síklapok között

(az alsó áll, a felső egyenletesen mozog)

A ternészetes és a számítási koordinátarendszer közötti *transzformáció* **E** tenzorának elemei:

$$E_{11}=1 \quad ; \quad E_{12}=0 \quad ; \quad E_{13}=0$$
$$E_{21}=0 \quad ; \quad E_{22}=\pm 1 \quad ; \quad E_{23}=0$$
$$E_{31}=0 \quad ; \quad E_{32}=0 \quad ; \quad E_{33}=\pm 1$$

és ezekből a $\mathbf{G}^*$ *örvényviszkozitási* tenzor skalár elemei figyelemmel arra, hogy $H_{12}=H_{13}=0$:

$$G^*_{11}=H^*_{11} \quad ; \quad G^*_{12}=\pm 1 \quad ; \quad G^*_{13}=0$$
$$G^*_{21}=\pm 1 \quad ; \quad G^*_{22}=H^*_{22} \quad ; \quad G^*_{23}=0$$
$$G^*_{31}=0 \quad ; \quad G^*_{32}=0 \quad ; \quad G^*_{33}=H^*_{33}$$

a skalár mozgásegyenletek:

$$0 = -\rho \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} \pm \frac{d\Theta}{dy}$$

$$0 = -\rho \frac{\partial \Pi}{\partial y} + H_{22}^{*} \frac{d\Theta}{dy}$$

$$\Theta(y) = \rho\kappa^2 l^2(y)\Omega_z^2(y) = \rho\kappa^2 l^2(y)\left(\frac{dv}{dy}\right)^2$$

a teljes potenciál egyenlete:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 0$$

$$\Pi(x,y) = -\frac{\Delta\Pi}{L}x + b(y)$$

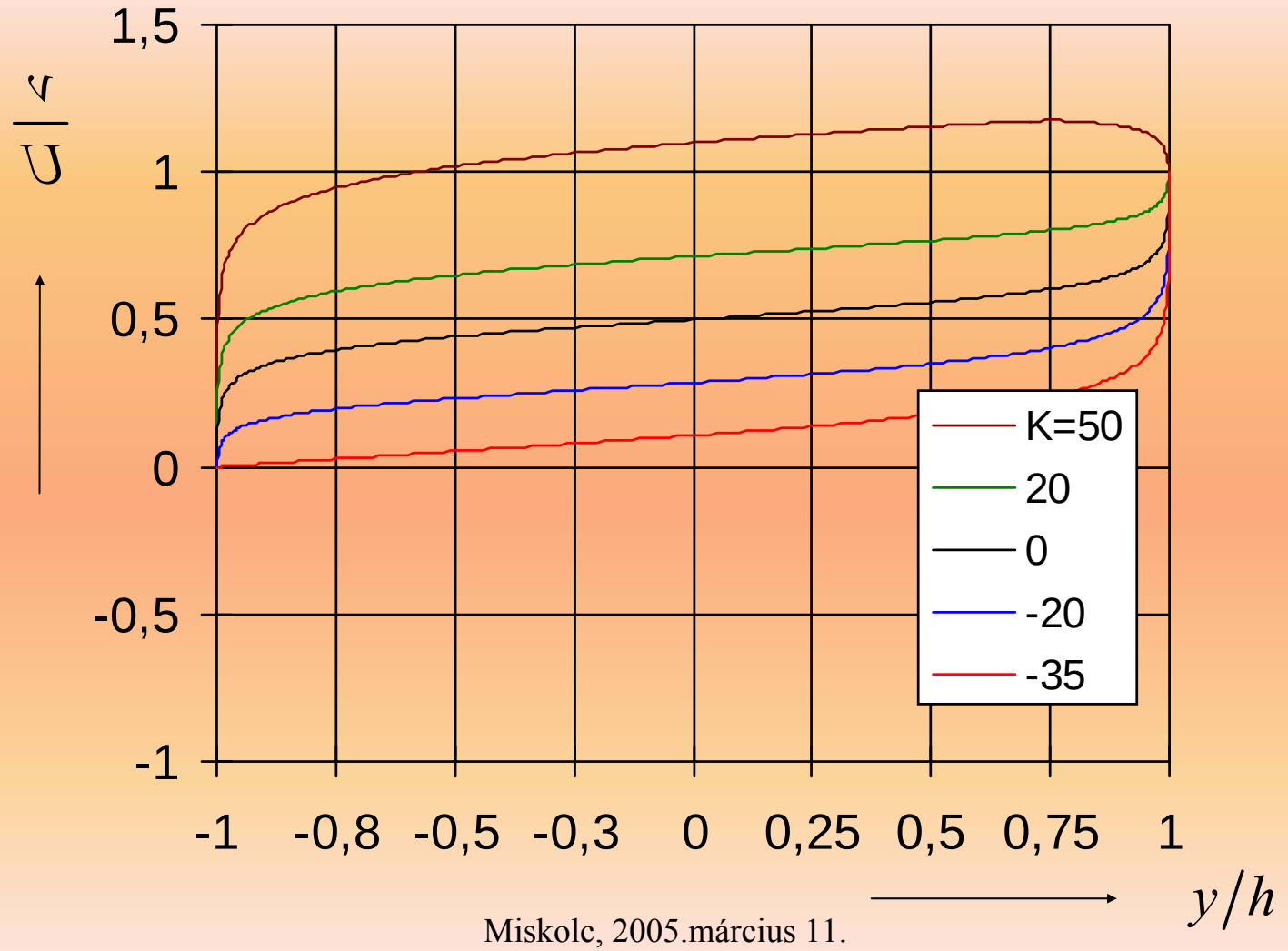
c	A Couette-áramlás ún. ellenállásformulái
$1 \leq$	$A = (c+1)B - \frac{1}{\kappa}\left\{2\sqrt{c-1}\arctan\sqrt{\frac{c+1}{c-1}} + \sqrt{c+1}\ln\frac{cB}{4(c+1)\,\mathrm{Re}_*}\right\}$ $\frac{U}{v_*} = A - (c-1)B + \frac{1}{\kappa}\left\{2\sqrt{c+1}\arctan\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} + \sqrt{c-1}\ln\frac{cB}{4(c-1)\,\mathrm{Re}_*}\right\}$ $\frac{v_0}{v_*} = A + \frac{1}{\kappa}\left\{2\sqrt{c-1}\arctan\frac{1}{\sqrt{c-1}} + \sqrt{c+1}\ln\frac{\sqrt{c+1}-1}{\sqrt{c+1}+1}\right\}$
< 1	$A = (1+c)B - \frac{1}{\kappa}\left\{\sqrt{1+c}\ln\frac{cB}{4(1+c)\,\mathrm{Re}_*} - \sqrt{1-c}\ln\frac{\sqrt{1+c}-\sqrt{1-c}}{\sqrt{1+c}+\sqrt{1-c}}\right\}$ $\frac{U}{v_*} = A - (c-1)B + \frac{1}{\kappa}\left\{\sqrt{1+c}\ln\frac{\sqrt{1+c}-\sqrt{1-c}}{\sqrt{1+c}+\sqrt{1-c}} - \sqrt{1-c}\ln\frac{cB}{4(1-c)\,\mathrm{Re}_*}\right\}$ $\frac{v_0}{v_*} = A + \frac{1}{\kappa}\left\{\sqrt{1+c}\ln\frac{\sqrt{1+c}-1}{\sqrt{1+c}+1} - \sqrt{1-c}\ln\frac{1-\sqrt{1-c}}{1+\sqrt{1-c}}\right\}$

$c=0$	$A=B-\frac{1}{\kappa}\ln\frac{B}{2\,\mathrm{Re}_*}$; $\frac{U}{v_*}=A+B-\frac{1}{\kappa}\ln\frac{B}{2\,\mathrm{Re}_*}$; $\frac{v_0}{v_*}=A$
$-1<$	$A=(1+c)B-\frac{1}{\kappa}\left\{\sqrt{1+c}\ln\frac{-cB}{4(1+c)\,\mathrm{Re}_*}-\sqrt{1-c}\ln\frac{\sqrt{1-c}-\sqrt{1+c}}{\sqrt{1-c}+\sqrt{1+c}}\right\}$ $\frac{U}{v_*}=A-(c-1)B+\frac{1}{\kappa}\left\{\sqrt{1+c}\ln\frac{\sqrt{1-c}-\sqrt{1+c}}{\sqrt{1-c}+\sqrt{1+c}}-\sqrt{1-c}\ln\frac{-cB}{4(1-c)\,\mathrm{Re}_*}\right\}$ $\frac{v_0}{v_*}=A+\frac{1}{\kappa}\left\{\sqrt{1+c}\ \ln\frac{1-\sqrt{1+c}}{1+\sqrt{1+c}}-\sqrt{1-c}\ln\frac{\sqrt{1-c}-1}{\sqrt{1-c}+1}\right\}$
≤ -1	$A=(c+1)B+\frac{1}{\kappa}\left\{2\sqrt{1-c}\arctan\sqrt{\frac{-c-1}{1-c}}+\sqrt{-c-1}\ln\frac{cB}{4(c+1)\,\mathrm{Re}_*}\right\}$ $\frac{U}{v_*}=A-(c-1)B-\frac{1}{\kappa}\left\{2\sqrt{-c-1}\arctan\sqrt{\frac{1-c}{-c-1}}+\sqrt{1-c}\ln\frac{-cB}{4(1-c)\,\mathrm{Re}_*}\right\}$ $\frac{v_0}{v_*}=A-\frac{1}{\kappa}\left\{2\sqrt{-c-1}\ \arctan\frac{1}{\sqrt{-c-1}}+\sqrt{1-c}\ln\frac{\sqrt{1-c}-1}{\sqrt{1-c}+1}\right\}$

$$v_*=\sqrt{\upsilon U/2h}\ \ ;\ \ K=2h^2\Delta\Pi/\upsilon LU\ \ ;\ \ c=\Delta\Pi\, h/v_*^2L$$

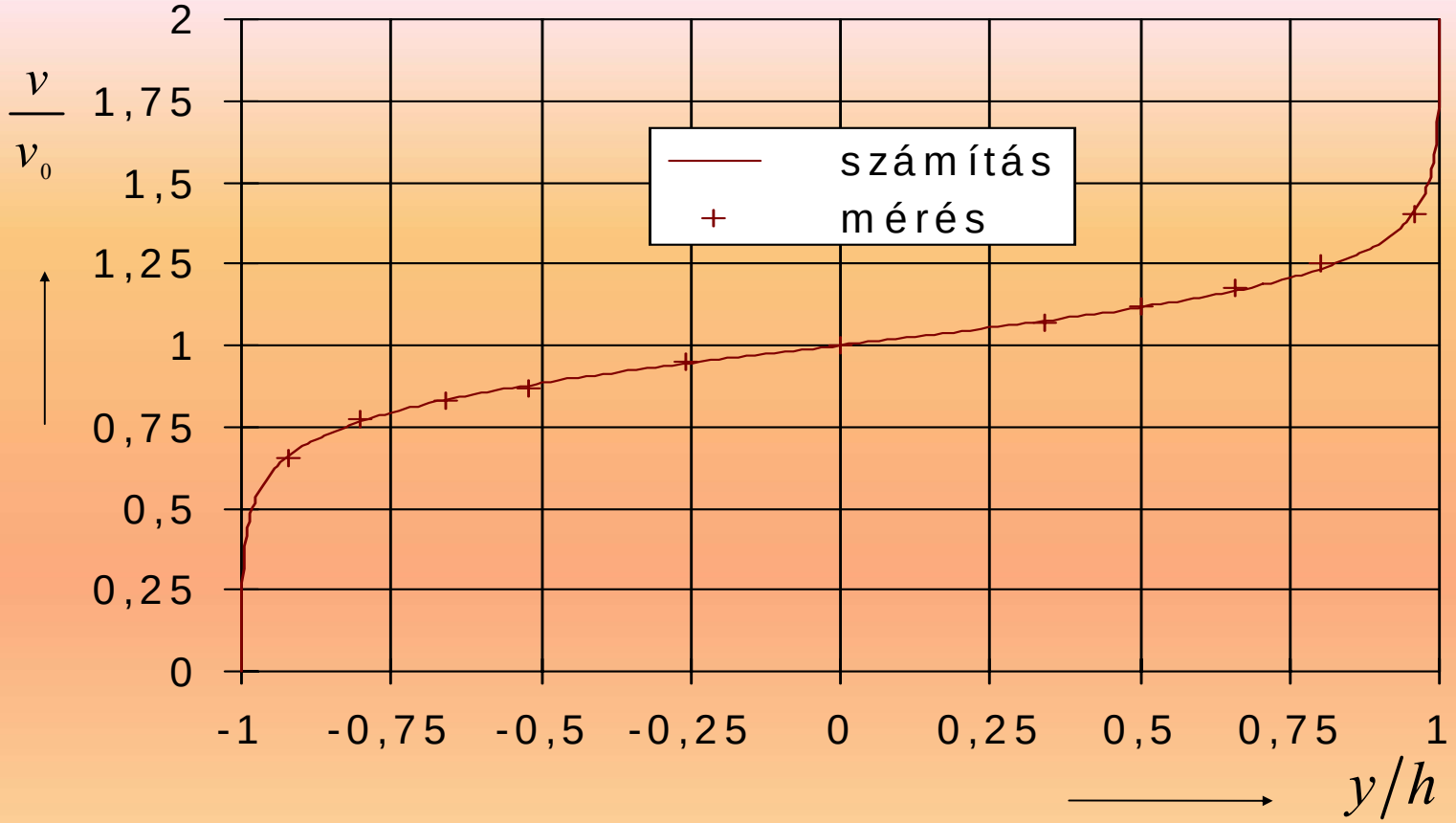
Turbulens sebességprofilok sík lapok közötti Couette-áramlásban különböző mértékű nyomásváltozások esetén

$(\mathrm{Re}_* = 733)$



Couette-áramlásban számított turbulens sebességeloszlás összehasonlítása Reichardt *) mérési eredményeivel

$(\mathrm{Re}_* = 733;\ K = 0)$

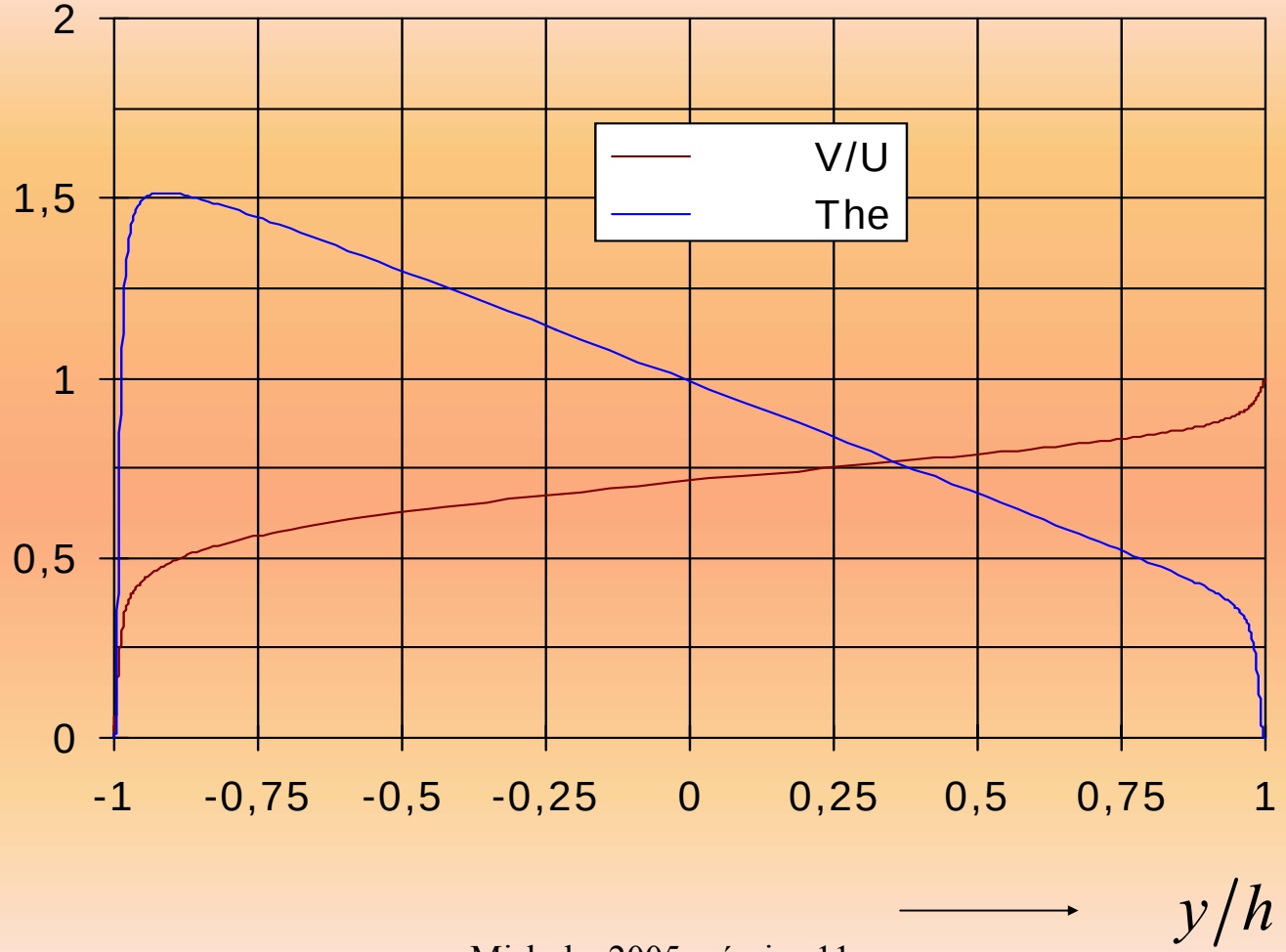


.*) Reichardt, H. : Gesetzmäßigkeiten der geradlinigen turbulenten Couette-Strömung *Mitt. aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Nr.22, Göttingen (1959)*

Sík lapok közötti turbulens Couette-áramlás

$$(\quad \mathrm{Re}_* = 733 \ ; K = 20 \ )$$

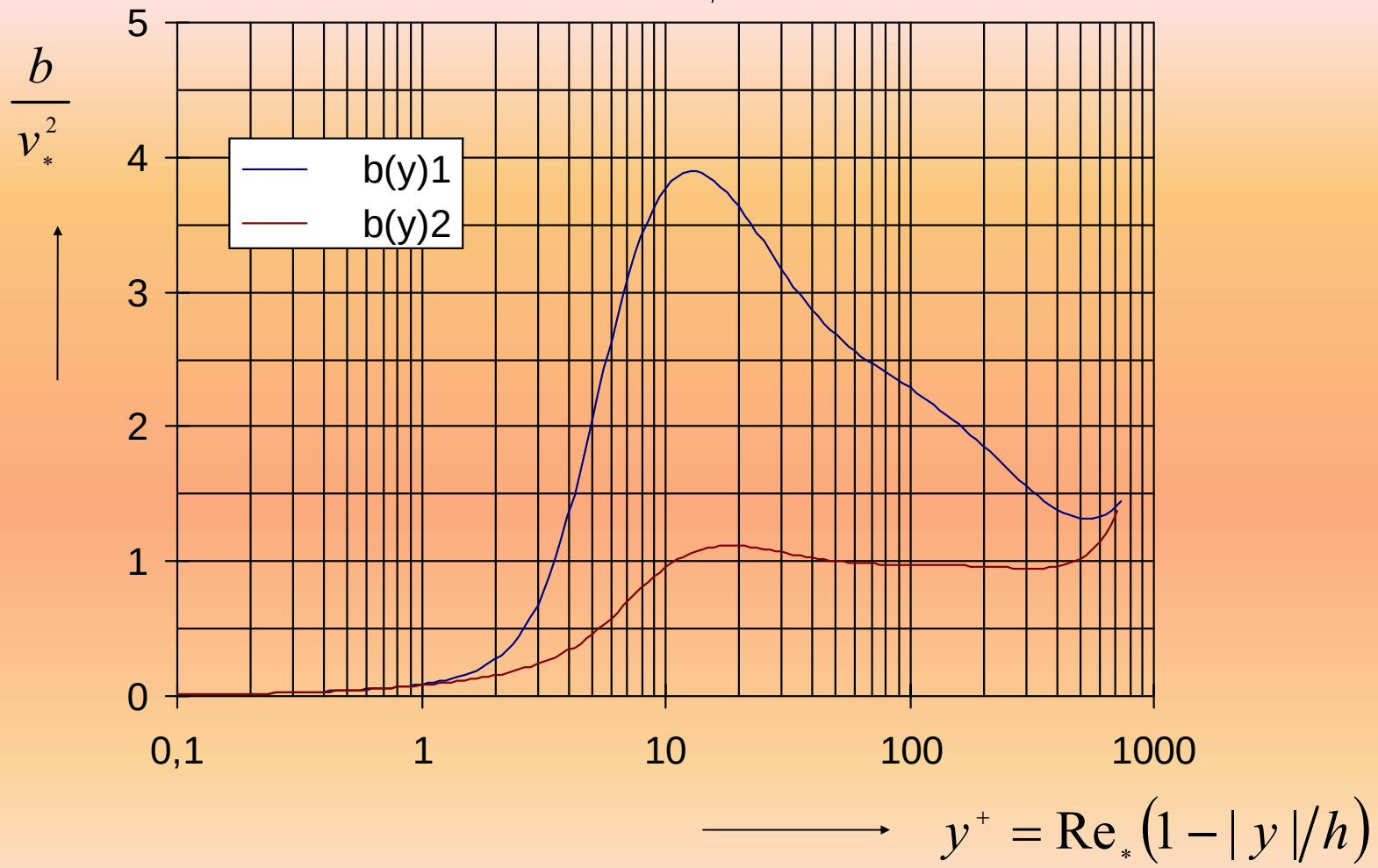
$$K = 2h^2 \Delta\Pi / \upsilon L U$$



Sík lapok közötti turbulens Couette-áramlás

$(\mathrm{Re}_* = 733\ ;\ K = 20)$

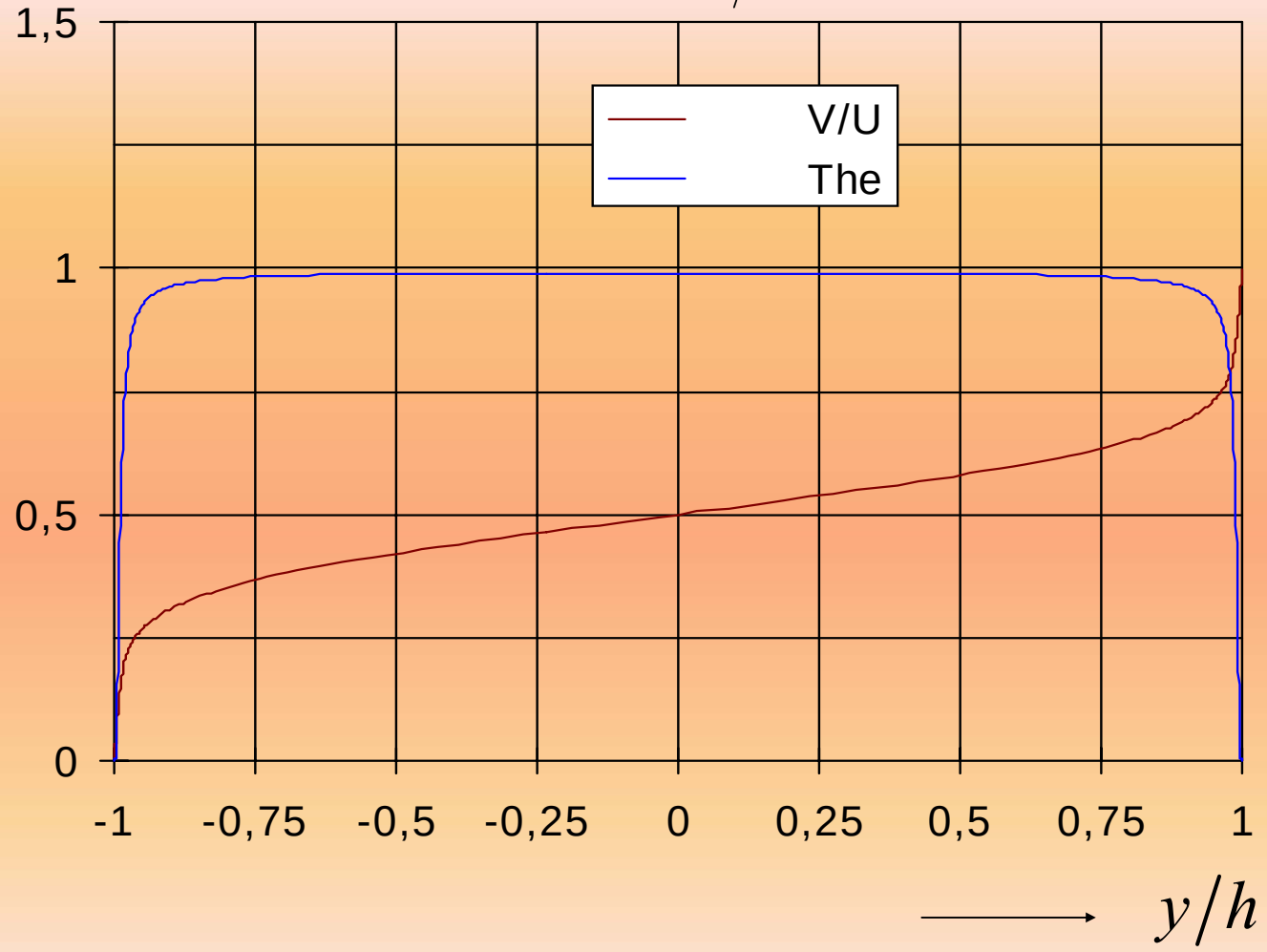
$K = 2h^2 \Delta\Pi / \upsilon L U$



Sík lapok közötti turbulens Couette-áramlás

$(\mathrm{Re}_* = 733\,;\, K = 0)$

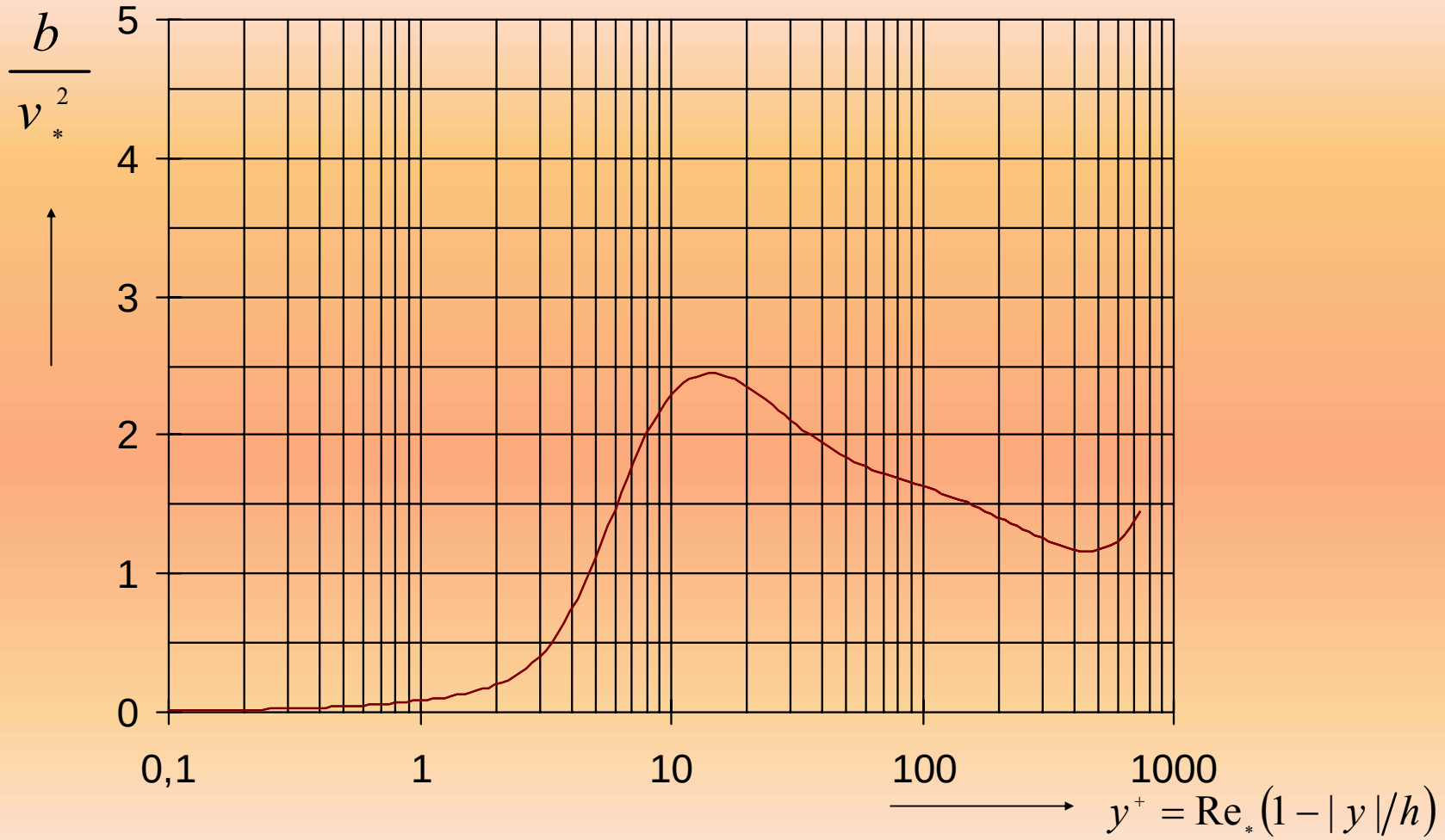
$K = 2h^2 \Delta\Pi / \upsilon L U$



Sík lapok közötti turbulens Couette-áramlás

$(\mathrm{Re}_* = 733\,;\, K = 0)$

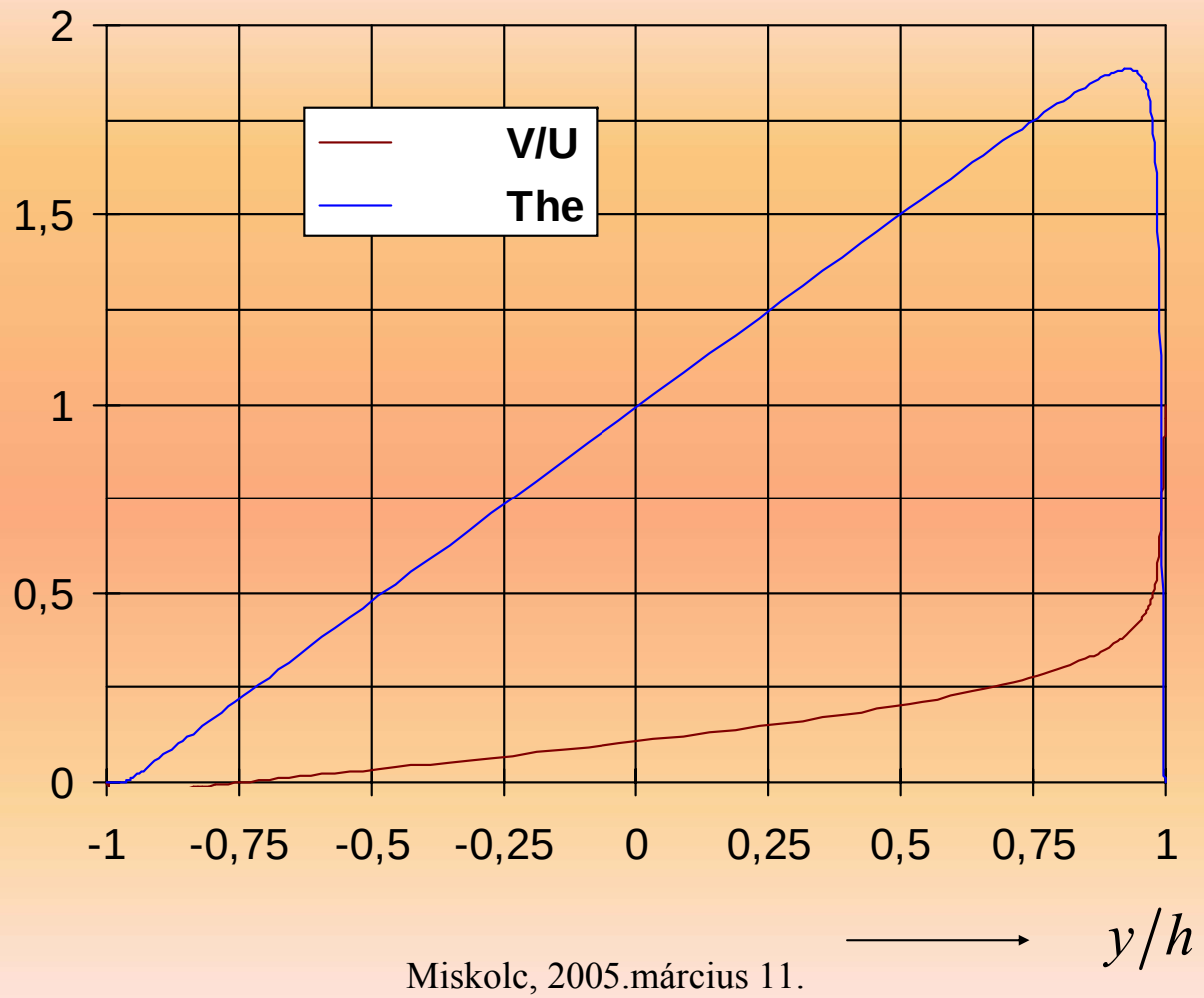
$K = 2h^2 \Delta\Pi / \upsilon L U$



Sík lapok közötti turbulens Couette-áramlás

$$(\mathrm{Re}_* = 733\,;\, K = -35)$$

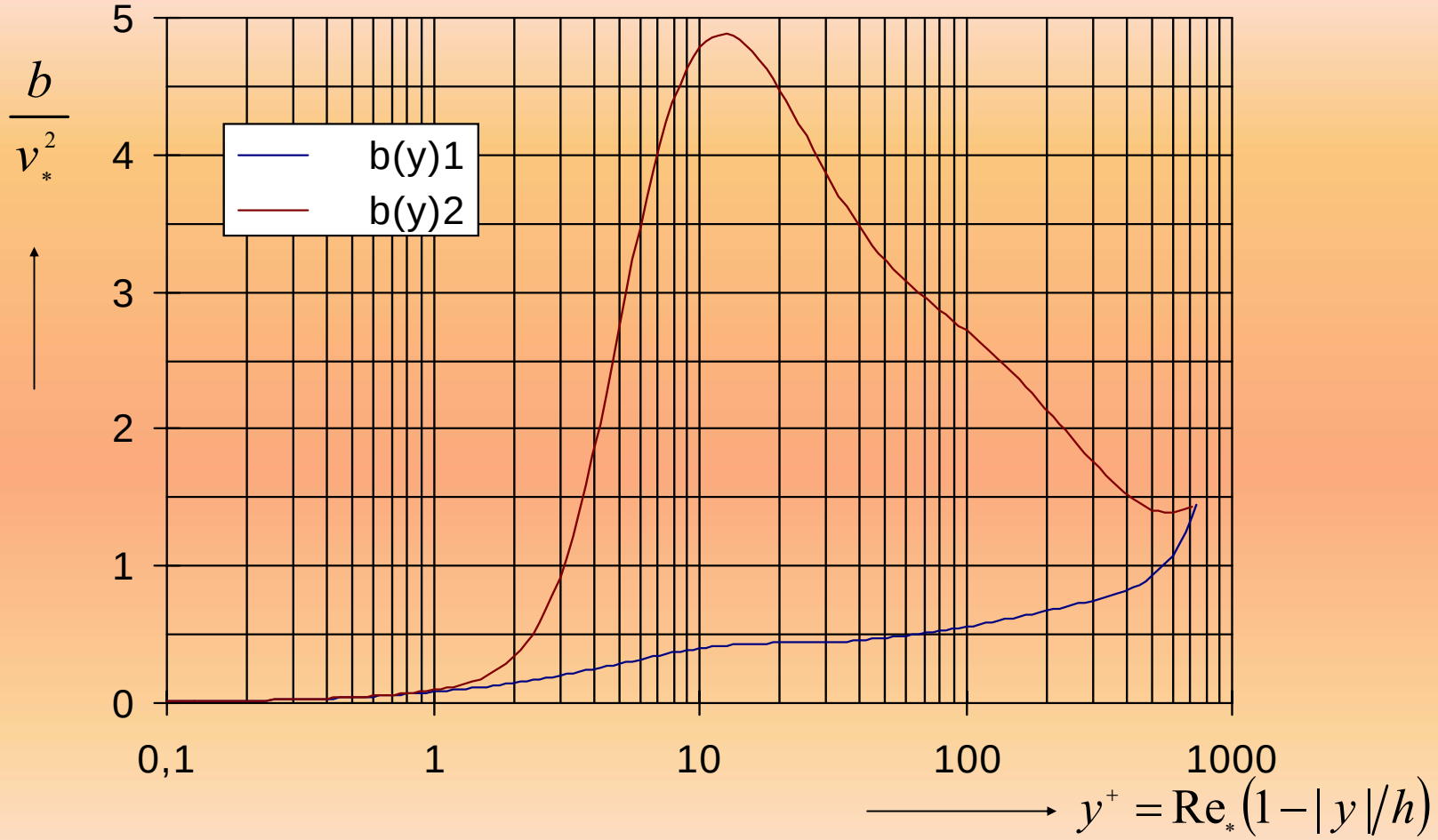
$$K = 2h^2 \Delta\Pi / \upsilon L U$$



Sík lapok közötti turbulens Couette-áramlás

$$(\mathrm{Re}_* = 733\,;\, K = -35)$$

$$K = 2h^2 \Delta\Pi / \upsilon L U$$



Köszönöm a figyelmet!